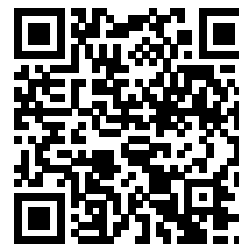




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (П. Д. Муленко)

Ответ: 6 см/мин.

Решение. Поскольку суммарный подъём равен суммарному спуску, весь маршрут муравья можно разбить на 3 части: общий подъём, общий спуск и общий горизонтальный участок.

Обозначим общее время, которое муравей поднимался, за t . Тогда длина подъёма (как и спуска) равна $3t$, а общее время спуска равно $3t/v$, где v — искомая скорость спуска.

Таким образом, время горизонтального движения равно $7 - t - 3t/v$, и мы можем выразить общий пройденный путь:

$$28 = 3t + 4 \left(7 - t - 3 \cdot \frac{t}{v} \right) + 3t,$$
$$28 = 6t + 28 - 4t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 0 = 2t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 6 \cdot \frac{t}{v} = t, \quad v = 6.$$

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Вывод уравнения — 2 балла. Доказательство на конкретном примере — не более 3 баллов.

2. В каждой клетке таблицы 3×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (А. А. Теслер)

Ответ: 120.

Решение. Сумма будет минимальной при использовании минимальных возможных чисел. Сумма чисел от 1 до 15 равна $15 \cdot 16/2 = 120$, что кратно и 3, и 5 (то есть сумма в строке должна быть равна $120/3 = 40$, а в столбце — $120/5 = 24$).

Осталось привести пример заполненной таблицы:

15	3	6	4	12
1	7	13	9	10
8	14	5	11	2

Критерии. Только ответ — 1 балл. Дан ответ и приведен пример — 3 балла. Дан ответ и приведено доказательство того, что меньше 120 быть не может, но примера нет — 3 балла.

3. У Паши есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Паша хочет сделать подарить каждому своему другу особую версию такого календаря. Сколько различных календарей он может сделать?



Паша считает два календаря различными, если в одном из них есть кубик с неким набором наклеек, а в другом кубика с таким же набором наклеек нет; расположение цифр на гранях Паша не учитывает.

(М. В. Карлукова)

Ответ: 10 календарей.

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Несмотря на то что это 7 различных цифр, Паша может справиться, если наклеит только одну из цифр 6 и 9 — действительно, одна цифра получается из другой переворотом.

Итак, Паше надо разместить на каждый из кубиков цифры 0, 1, 2 и три цифры из набора от 3 до 8. Поскольку расположение цифр на кубике Паше не важно, количество различных календарей ограничено количеством способов разделить цифры от 3 до 8 на две равные группы по 3 цифры на каждый из кубиков. Выбрать 3 цифры на первый кубик можно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на {3, 4, 5} для первого кубика и {6, 7, 8} для второго равнозначно разбиению на {6, 7, 8} для первого кубика и {3, 4, 5} для второго — поэтому Паша может сделать всего $20/2 = 10$ различных календарей.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Показано, что на обоих кубиках должны быть цифры 1 и 2 — +1 балл. Показано, что на обоих кубиках должна быть цифра 0 — +1 балл. Не учтено, что порядок кубиков не важен (получается 20 вместо 10) — -2 балла. Подсчитано число способов с учетом расположения цифр на гранях — -2 балла.

4. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты.

(Л. С. Корешкова)

Ответ: у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

Решение. Так как $289 = 17^2$, Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):

- белорусских монет больше $289 \cdot 0,06 = 17,34 > 17$, то есть их не менее 2 коробок;
- испанских монет больше $289 \cdot 0,12 = 34,68 > 34 = 17 \cdot 2$, то есть их не менее 3 коробок;
- эквадорских монет больше $289 \cdot 0,24 = 69,36 > 68 = 17 \cdot 4$, то есть их не менее 5 коробок;
- русских монет больше $289 \cdot 0,36 = 104,04 > 102 = 17 \cdot 6$, то есть их не менее 7 коробок.

Таким образом, у Ирины уже заняты $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коровок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и добавляет доминошки 1×2 до тех пор, пока суммарная площадь фигур не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Катя сто раз обменялась карточками с автоматом и получила 2025. С какого числа она начала? (П. Д. Муленко)

Ответ: 1925.

Решение. Рассмотрим одну операцию автомата с числом n :

- он строит квадрат $n \times n$ площадью n^2 клеток;
- убирает из него одну клетку, получая многоугольник площади $n^2 - 1$;
- добавляет к нему k доминошек, получая многоугольник площади $n^2 - 1 + 2k$, которая равна квадрату какого-то числа m ;
- число m он возвращает обратно.

После добавления первой доминошки площадь многоугольника равна $n^2 - 1 + 2 \cdot 1 = n^2 + 1$, то есть фигура уже больше изначального квадрата, что означает, что $m > n$. При этом следующий возможный квадрат равен $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, и это число оказывается достижимо после добавления ещё n доминошек к уже имеющейся площади $n^2 + 1$.

Таким образом, каждый раз автомат будет выдавать следующее натуральное число. Раз Катя обменялась карточками 100 раз и получила 2025, она должна была начать с числа на 100 меньше: $2025 - 100 = 1925$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Сформулировано утверждение о том, что автомат выдаст $n + 1$ после ввода n — +1 балл. Доказано это утверждение — 5 баллов. Ошибка ± 1 при поиске ответа — -1 балл

6. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N , причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (Л. С. Корешкова)

Ответ: нет, не получится.

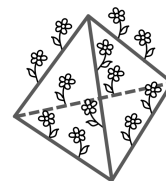
Решение. Раз количество городов N чётно, но не делится на 4, его можно представить как $N = 4k + 2$. Тогда общее количество дорог в стране Оз равно

$$\frac{N \cdot (N - 1)}{2} = \frac{(4k + 2) \cdot (4k + 1)}{2} = (2k + 1) \cdot (4k + 1).$$

Оба числа $2k + 1$ и $4k + 1$ являются нечётными, то есть и общее количество дорог нечётно. Но тогда количество дорог из жёлтого кирпича не может быть равно количеству дорог из зелёного изумруда, поэтому какая-то пара номеров останется соединена дорогой того же цвета, что и до перенумерования.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что суммарное количество дорог нечётно — 5 баллов.

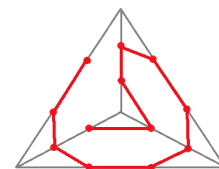
7. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут?



Ответ: 11 метров.

(Л. С. Корешкова)

Решение. Расстояние между любыми двумя цветками не менее 1 метра. Более того, на минимальном расстоянии находятся не только цветки на одном ребре, но и тройки ближайших цветков к каждой из вершин тетраэдра. Таким образом, чтобы попасть на каждый новый цветок, нужно не менее 1 метра, поэтому весь маршрут пчелы не может быть короче 11 метров. Пример маршрута длиной 11 метров показан на рисунке (вид сверху).



Примечание. Можно понимать вопрос задачи более строго — что для каждого начального цветка требуется найти кратчайшую длину пути, который начинается на этом цветке. Тогда верным ответом будет «11 или $10 + \sqrt{3}$ в зависимости от того, на какой цветок прилетела пчела изначально». Поскольку условие можно понять обоими способами, жюри засчитывало решение в любой из этих трактовок.

Критерии. Только оценка — 3 балла. Только пример — 3 балла (если пример требует «полётов под землёй», то есть по нижней грани тетраэдра, то он оценивается в 1 балл вместо 3). Утверждение, что расстояние между определёнными точками 1 метр, а между остальными больше 1 метра, не требует доказательства.