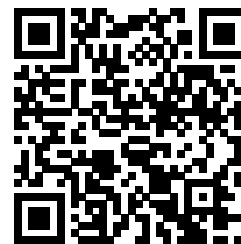




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



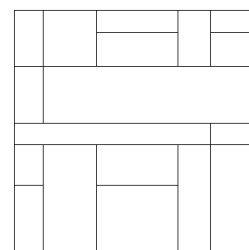
Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

- Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет.
(П. Д. Муленко)



Ответ: 54.

Решение. Подпишем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками»), как показано на рисунке.

Сперва рассмотрим центральную полосу из блоков 0A, 0B и двух неподписанных. Тройка блоков из двух неподписанных и 0A все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый неподписанный блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй неподписанный блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок 0A можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока. Блок 0B тоже касается обоих неподписанных, поэтому его цвет будет таким же, как и у блока 0A.



Теперь рассмотрим верхнюю и нижнюю полосы из блоков 1A–7A и 1B–7B. Эти две группы идентичны друг другу по тому, как блоки граничат друг с другом, поэтому будем рассматривать их вместе.

Если блок с номером 1 имеет отличный цвет от соответствующего блока 0 (что продемонстрировано в нижней полоске на примере блоков 0A и 1A), то цвета всех остальных блоков восстанавливаются однозначно. Так, блок 2 граничит и с блоком 0, и с блоком 1, поэтому он должен быть третьего цвета; блок 3 граничит и с блоком 1, и с одним из неподписанных блоков, поэтому он должен быть того же цвета, что и блок 0; и так далее.

А если же блок с номером 1 окрашен в тот же цвет, что и соответствующий блок 0 (что продемонстрировано в верхней полоске на примере блоков 0B и 1B), то тогда блок 2 может быть раскрашен в любой из двух других цветов, а все остальные блоки в полоске закрашиваются однозначно.

Таким образом, есть 6 возможных раскрасок для центральной полосы из 4 блоков (двух неподписанных, 0A и 0B), и по 3 возможных раскраски для верхней и нижней полос (из блоков 1B–7B и 1A–7A, соответственно). Всего $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ возможных раскраски.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведена только одна какая-то раскраска и больше ничего — 0 баллов.

Вне зависимости от логики перебора, каждый потерянный случай — -2 балла.

2. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 2 или 5 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Буратино может (но не обязан) в конце каждого месяца снять с дерева ровно 3 монеты (тогда эти веточки больше расти не будут). Может ли в какой-то момент на дереве оказаться ровно 999 монет? (П. Д. Муленко)

Ответ: Нет.

Решение. Если в очередной месяц количество монет равнялось $x + y$, где x — это количество монет, из которых прорастут 2 новые, а y — это количество монет, из которых прорастут 5 новых, то в следующем месяце количество монет будет равно $2x + 5y$ или $2x + 5y - 3$ в зависимости от того, решит Буратино снять 3 монеты с дерева или нет.

Заметим, что если $x + y$ не делится на три (иными словами, хотя бы одно из чисел x и y не делится на 3), то и новое число монет не будет делиться на 3. А поскольку Буратино изначально посадил 1 монету (что не кратно 3), то и в любой последующий месяц количество монет не будет кратно 3. Значит, 999 монет (что делится на 3) получиться не могло.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.

Сформулирована идея инварианта по модулю 3 — +3 балла.

3. 2130 год будет «годом-перевертышем» — если поставить знак «минус» между второй и третьей цифрами, то разность двух двузначных чисел, прочитанных слева направо, будет равна разности двузначных чисел, прочитанных справа налево: $21 - 30 = 03 - 12 = -9$. Сколько всего таких лет в третьем тысячелетии?

Примечание. Как видно из примера, числа могут начинаться с нуля, а разность не обязана быть положительной. (Л. С. Корешкова)

Ответ: 69 лет.

Решение. Расписав равенство по разрядам, приходим к выводу, что сумма первых двух должна быть равна сумме последних двух:

$$10a + b - (10c + d) = 10d + c - (10b + a) \Rightarrow 11(a + b) = 11(c + d) \Rightarrow a + b = c + d.$$

А так как нас интересуют годы в третьем тысячелетии, то $a = 2$ (см. замечание в конце решения). Таким образом, достаточно перебрать возможные значения остальных цифр (например, по столетиям):

- $b = 0$: $c + d = 2 \rightarrow 2002, 2011, 2020$ — 3 года;
- $b = 1$: $c + d = 3 \rightarrow 2103, 2112, 2121, 2130$ — 4 года;
- $b = 2$: $c + d = 4 \rightarrow 2204, 2213, 2222, 2231, 2240$ — 5 лет;
- $b = 3$: $c + d = 5 \rightarrow 2305, 2314, \dots, 2350$ — 6 лет;
- $b = 4$: $c + d = 6 \rightarrow 2406, 2415, \dots, 2460$ — 7 лет;
- $b = 5$: $c + d = 7 \rightarrow 2507, 2516, \dots, 2670$ — 8 лет;
- $b = 6$: $c + d = 8 \rightarrow 2608, 2617, \dots, 2680$ — 9 лет;
- $b = 7$: $c + d = 9 \rightarrow 2709, 2718, \dots, 2790$ — 10 лет;
- $b = 8$: $c + d = 10 \rightarrow 2819, 2828, \dots, 2891$ — 9 лет;
- $b = 9$: $c + d = 11 \rightarrow 2929, 2938, \dots, 2992$ — 8 лет.

Всего получаем $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 = 69$ лет-перевертышей.

Примечание. Строго говоря, третьим тысячелетием является диапазон лет с 2001 по 3000, но, так как ни 2000-й год, ни 3000-й не являются перевертышами, мы можем смело рассматривать диапазон с 2000 по 2999 годы.

Критерии. Доказано, что сумма двух первых цифр равна сумме двух последних — не менее 3 баллов. Наоборот, если перечислены (и верно подсчитаны) все годы-перевёртыши, но полностью отсутствует доказательство, что других нет — 2 балла.

Неправильно подсчитаны годы-перевёртыши в каких-то столетиях — не больше 5 баллов.

Рассматривается диапазон 2000–2999 вместо 2001–3000 — баллов не снимать.

4. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, в маленькие кубики которого требуется расставить числа от 1 до 27 (все числа должны быть использованы). Может ли так получиться, что в любой паре соседних кубиков (то есть имеющих общую грань) числа будут взаимно просты? (С. П. Павлов)

Ответ: да, может. Например, так:

5	24	25	2	1	4	21	16	15
6	7	12	17	8	19	20	27	22
11	18	13	10	23	14	3	26	9
Верхний слой			Средний слой			Нижний слой		

Критерии. Только пример без проверки — 7 баллов.

5. В школе учатся 50 детей. Некоторые из них — рыцари (отвечают только правду), остальные — лжецы (всегда врут). Ещё в школе есть Директор и Учитель. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 50 до 100 конфет включительно. Директор планирует написать 50 бумажек, на каждой из которых написаны два вопроса (один красной ручкой, другой синей). Каждый вопрос должен подразумевать ответ «да» или «нет». Потом Директор случайным образом раздаёт каждому ребёнку по одной бумажке, после чего уходит. Далее начинается ёлка, на которой Дед Мороз по очереди вызывает детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт сначала красный вопрос Деду Морозу, а потом синий — случайному ребёнку. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Помогите Директору придумать такие вопросы, чтобы по числу, полученному от Учителя, определить, сколько конфет у Деда Мороза. Кстати, Директор не помнит, сколько из детей — рыцари, а Дед Мороз отвечает правду рыцарям и врёт лжецам.

(И. М. Туманова, А. А. Теслер)

Ответ: Например, Директор нумерует детей от 1 до 50, каждому вписывает синий вопрос «Ты рыцарь?» и красный вопрос «Утверждения "Я рыцарь" и "У тебя больше, чем $49 + k$ конфет" имеют одинаковую истинность?», где k — номер ребёнка.

Решение. Покажем, что количество ответов «да» в ситуации, описанной в ответе, равно количеству конфет. Действительно, на вопрос «Ты рыцарь?» любой ученик ответит «да» независимо от того, является он рыцарем или лжецом. Разберём вопрос ученика Деду Морозу. Если ученик с номером k является рыцарем, то Дед Мороз честно ответит «да», если у него действительно больше $49 + k$ конфет, и честно ответит «нет», если у него не более чем $49 + k$ конфет. Если же спрашивающий ученик является лжецом, то, если у Деда Мороза больше $49 + k$ конфет, истинность ответов разная, поэтому он сойдёт и скажет «да», а иначе истинность ответов одинаковая, поэтому он скажет «нет». Таким образом, предложенная постановка вопроса ученика Деду Морозу позволяет последнему честно отвечать «да» или «нет» на скрытый вопрос «У тебя больше $49 + k$ конфет?» независимо от того, является вопрошающий рыцарем или лжецом. Значит, если у Деда Мороза a конфет, то он будет отвечать «да» тем ученикам, чей номер k удовлетворяет неравенству $a > 49 + k$, то есть при всех $k \leq a - 50$. Поскольку $50 \leq a \leq 100$, то количество таких учеников равно $a - 50$ (от нуля при $a = 50$ до 50 при $a = 100$). В сумме с 50 ответами учеников на вопросы друг друга получается ровно a ответов «да».

Например, если конфет 70, то 50 ответов «да» дадут ученики и ещё 20 даст Дед Мороз, отвечая ученикам с номерами от 1 до 20.

Критерии. Приведён подходящий алгоритм, но не объяснено, как и почему Директор может установить число конфет (по сути, только ответ без обоснования) — не более 5 баллов.

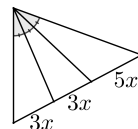
Если предложенный алгоритм использует фразы вида «Скажи "да", если выполняется такое-то условие, и "нет" в противном случае», которые не являются вопросами — -2 балла, если их нельзя просто переформулировать в вопрос без потери смысла.

Если предложенный алгоритм позволяет определить любое количество конфет, кроме какого-то одного (например, невозможно отличить 50 и 100 конфет) — не более 3 баллов.

Если предложенный алгоритм игнорирует условие про Деда Мороза (то есть считается, что он всегда отвечает честно) — не более 4 баллов.

6. В остроугольном треугольнике провели обе трисектрисы одного из углов (то есть разделили его на 3 равные части), которые разделили противоположную сторону в отношении $5 : 3 : 3$. Найдите периметр треугольника, если длина более короткой трисектрисы равна 6.

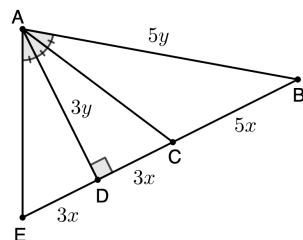
(П. Д. Муленко)



Ответ: $21 + 3\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим вершину разделённого угла за A , а точки на противоположной стороне за B, C, D и E так, что $BC : CD : DE = 5 : 3 : 3$.

Отрезок AD в треугольнике EAC является не только биссектрисой, но и медианой, поэтому треугольник EAC — равнобедренный, и AD перпендикулярно BE , что означает, что AD — более короткая трисектриса. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник DAB . В нём отрезок AC является биссектрисой, поэтому $BC : CD = AB : AD$. Обозначим длину $BC = 5x$ (тогда $CD = 3x$), а длину $AB = 5y$ (тогда $AD = 3y$).



По теореме Пифагора, $AB^2 = BD^2 + AD^2$, или $(5y)^2 = (8x)^2 + (3y)^2$, откуда $16y^2 = 64x^2$, то есть $y = 2x$. Следовательно, $AD = 3y = 6x = 6$, поэтому $x = 1$ (и $y = 2$).

Таким образом, $AB = 10$, $BC = 5$ и $CD = DE = 3$. Для нахождения периметра треугольника ABE осталось найти длину AE , что можно сделать с помощью теоремы Пифагора в треугольнике ADE : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, откуда $AE = 3\sqrt{5}$, и периметр равен $10 + 5 + 3 + 3 + 3\sqrt{5} = 21 + 3\sqrt{5}$.

Критерии. Объяснено, что AD является более короткой биссектрисой — 1 балл.

Задача решена в предположении, что $BC = 5$ и $CD = DE = 3$ — не более 2 баллов.

Не доказано, что $AD \perp BE$ (например, потому что «более короткая» понято как «кратчайшее расстояние») — -2 балла.