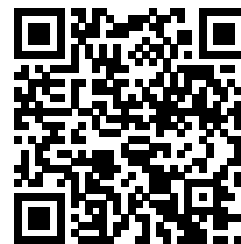




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

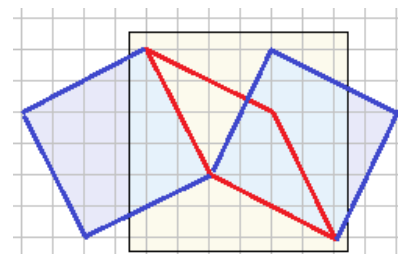
- Петя нарисовал на квадратном листе бумаги ромб, который не является квадратом. Всегда ли Вася сумеет на том же листе нарисовать квадрат, две соседних вершины которого совпадают с двумя соседними вершинами ромба? (А. А. Теслер)

Ответ: нет — можно сделать так, чтобы каждый из восьми квадратов выходил за края листа (пример показан справа).

Критерии. Только ответ «не всегда» — 0 баллов.

Показан верный пример, но не объяснено, почему он подходит — 3 балла.

Показан подходящий пример и нарисованы все существенно различные виды квадратов, но то, что они выходят за границу листа, продемонстрировано только рисунком без расчётов, объяснений и без явной привязки к клетчатой сетке — 5 баллов.



- В некоторых клетках клетчатого поля $n \times n$ стоит по шашке так, что в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух больших диагоналей шашек ровно две. При каких n такое возможно? (С. П. Павлов)

Ответ: при $n = 2$ и $n \geq 4$.

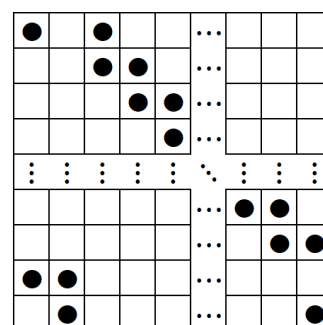
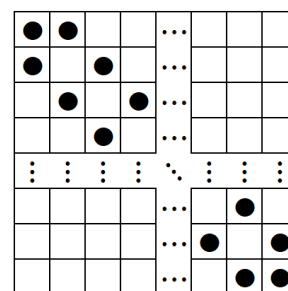
Решение. Очевидно, что n не может быть равно 1 и может быть равно 2.

Если $n = 3$, то необходимо поставить 6 шашек, то есть оставить пустыми всего 3:

- если центральная клетка пуста, то все 4 угла должны быть заняты (чтобы в диагоналях было по 2 шашки), но тогда по 2 шашки уже есть в крайних столбцах и строках, то есть больше шашек ставить нельзя;
- если центральная клетка занята, то только 2 угла из 4 заняты, причём смежные (вдоль одной стороны), но тогда у противоположной стороны 2 шашки поставить не получится.

Наконец, при всех остальных $n \geq 4$ расстановка существует:

- если n чётно, то достаточно выбрать одну большую диагональ, поставить по шашке на её концах и заполнить шашками обе параллельные чуть более короткие диагонали (см. верхний рисунок);
- если n нечётно, то достаточно поставить по шашке в два противоположных угла, ещё три шашки вокруг третьего угла, а в остальном квадрате размером $(n - 2) \times (n - 2)$ поставить шашки «лесенкой» по двум параллельным диагоналям (см. нижний рисунок).



Критерии. Только пример для какого-то конкретного $n > 4 - 1$ балл.

Баллы за следующие продвижения суммируются: рассмотрены случаи $n \leq 2 - 1$ балл; $n = 3 - 1$ балл; $n > 3$ — по два балла за чётный и нечётный случаи; +1 балл за полное решение.

3. У Павла есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Павел планирует открыть бизнес по производству сувенирных календарей, причём хочет, чтобы каждое изделие было уникальным. Сколько различных календарей он может сделать?



Павел считает два календаря одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон наклейки на этих кубиках были одинаковыми (возможно, по-разному повернутыми).

(М. В. Карлукова)

Ответ: 9000 календарей.

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Несмотря на то что это 7 различных цифр, Павел может справиться, если наклеит только одну из цифр 6 и 9 — действительно, одна цифра получается из другой переворотом.

Итак, Павлу надо разместить на каждый из кубиков цифры 0, 1, 2 и три цифры из набора от 3 до 8. Поскольку расположение цифр на кубике Павлу не важно, количество различных календарей ограничено количеством способов разделить цифры от 3 до 8 на две равные группы по 3 цифры на каждый из кубиков. Выбрать 3 цифры на первый кубик можно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому у Павла есть всего $20/2 = 10$ различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.

Наконец, их осталось расставить. Наклеим на каждый из кубиков цифру 0 и поставим их так, чтобы календарь показывал 00. Тогда для противоположной цифры на задней грани есть 5 кандидатов, а остальные четыре цифры надо поставить вокруг «кольца» из 4 граней, то есть для каждой возможной расстановки есть 4 повтора из-за поворота кубика.

Итого у Павла есть $5 \cdot 4!/4 = 30$ способов расставить числа на каждом из кубиков, то есть он может сделать $10 \cdot 30^2 = 9000$ различных календарей.

Критерии. Баллы суммируются.

Цифры 0, 1, 2 должны быть на каждом кубике — 1 балл.

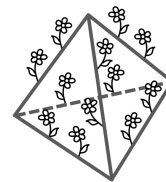
Вариантов выбрать цифры на кубик = 20 — 1 балл.

Учтено, что различных пар кубиков на самом деле 10 — +1 балл.

Оставшиеся 4 балла стоит понимание, что расставить числа на кубике можно 30 вариантами.

Таким образом, решение с ответом 18000 (а не 9000) стоит 6 баллов.

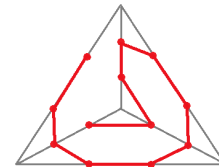
4. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут?



Ответ: 11 метров.

(Л. С. Корешкова)

Решение. Расстояние между любыми двумя цветками не менее 1 метра. Более того, на минимальном расстоянии находятся не только цветки на одном ребре, но и тройки ближайших цветков к каждой из вершин тетраэдра. Таким образом, чтобы попасть на каждый новый цветок, нужно не менее 1 метра, поэтому весь маршрут пчелы не может быть короче 11 метров. Пример маршрута длиной 11 метров показан на рисунке (вид сверху).



Примечание. Можно понимать вопрос задачи более строго — что для каждого начального цветка требуется найти кратчайшую длину пути, который начинается на этом цветке. Тогда верным ответом будет «11 или $10 + \sqrt{3}$ в зависимости от того, на какой цветок прилетела пчела изначально». Поскольку условие можно понять обоими способами, жюри засчитывало решение в любой из этих трактовок.

Критерии. Только оценка — 3 балла. Только пример — 3 балла (если пример требует «полётов под землёй», то есть по нижней грани тетраэдра, то он оценивается в 1 балл вместо 3). Утверждение, что расстояние между определёнными точками 1 метр, а между остальными больше 1 метра, не требует доказательства.

5. Если в начало натурального числа дописать одну цифру, то получится квадрат этого числа. Найдите самое большое такое число.

(П. Д. Муленко)

Ответ: 25.

Решение. Если число хотя бы трёхзначное, то его квадрат будет минимум на 2 цифры длиннее ($100^2 = 10\,000$), поэтому искомое число (пусть $\overline{ab}$) не более чем двузначное:

$$(\overline{ab})^2 = \overline{kab} \Leftrightarrow (\overline{ab})^2 = \overline{k00} + \overline{ab} \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100k,$$

где k — дописанная цифра.

Чтобы произведение двух последовательных чисел делилось на 100, одно из них должно делиться на 25. При этом $\overline{ab} < 32$, так как $32^2 = 1024$ — уже четырёхзначное число. Таким образом, $\overline{ab}$ может быть равно 25 или 26, но только в первом случае квадрат отличается от самого числа только первой цифрой: $25^2 = 625$, $26^2 = 676$.

Таким образом, наибольшее такое число — 25.

Примечание. Более того, 25 — это единственное такое двузначное число.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Замечание о том, что исходное число не может содержать более двух цифр — 2 балла.

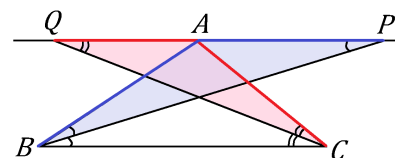
6. Дан разносторонний тупоугольный треугольник ABC с целыми сторонами. Через вершину тупого угла A провели прямую, параллельную BC , и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов B и C как P и Q . Чему равно PQ , если $BC = 4$?

(П. Д. Муленко)

Ответ: $PQ = 5$.

Решение. Из неравенств треугольника ABC следует, что $AB + AC > BC = 4$. А так как треугольник тупоугольный, то сторона BC , лежащая напротив тупого угла A , является наибольшей, то есть обе стороны AB и AC должны быть меньше 4. Наконец, так как треугольник ABC разносторонний, одна из сторон AB и AC равна 2, а другая — 3.

Поскольку BP является биссектрисой угла B , то $\angle PBC = \angle PBA$. Далее, прямая PQ параллельна BC , поэтому $\angle PBC = \angle BPA$. Значит, $\angle PBA = \angle BPA$, то есть треугольник BAP — равнобедренный, и $AP = AB$. Аналогично из равнобедренного треугольника QAC получаем, что $QA = AC$, а тогда искомая длина равна $PQ = PA + AQ = AB + AC = 2 + 3 = 5$.



Критерии. Замечено равенство накрест лежащих углов — 1 балл.

Доказано, что стороны AB и AC равны 2 и 3 — 3 балла.

Замечено, что на картинке два равнобедренных треугольника — 3 балла.

7. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна $2/81$. Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? (П. Д. Муленко)

Ответ: в квизе 5 вопросов по 3 варианта ответа в каждом.

Решение. Обозначим количество вопросов за n , а количество вариантов ответа в каждом вопросе за k . Вероятность угадать ответ на очередной вопрос равна $1/k$, то есть вероятность угадать ответы на все n вопросов равна $1/k^n$.

Если же на какой-то вопрос вы сперва ответили неверно с вероятностью $\frac{k-1}{k}$, то вы можете исправить свой ответ и повторно угадать правильный среди $k-1$ оставшихся. Таким образом, полная вероятность угадать ответ на вопрос с ошибкой равна

$$\frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k},$$

и есть n способов выбрать вопрос, на который вы ответите со второй попытки. Итого, полная вероятность успешно пройти квиз наугад равна

$$\frac{1}{k^n} + \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}.$$

Упрощая получившееся уравнение, получаем $81(n+1) = 2k^n$. Правая часть чётна, то есть $n+1$ чётно, откуда само n нечётно (и больше одного):

$n = 3$: $81 \cdot (3+1) = 2k^3 \Rightarrow k^3 = 81 \cdot 4 / 2 = 162$ — не подходит, так как 162 не куб;

$n = 5$: $81 \cdot (5+1) = 2k^5 \Rightarrow k^5 = 81 \cdot 6 / 2 = 243$ — подходит, $k = 3$.

Левая часть делится на 81, то есть k обязательно кратно 3. Поэтому при дальнейшем увеличении n левая часть будет каждый раз увеличиваться на 162, а правая — как минимум в 9 раз. Иными словами, при $n > 5$ правая часть всегда будет больше левой, и новых решений не найдётся.

Итого в квизе $n = 5$ вопросов, в каждом из которых по $k = 3$ варианта ответа.

Критерии. Вывод уравнения $\frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}$ — 3 балла. Если решение этого уравнение угадано — +1 балл. Если не обосновано, что нет решений при $n > 5$ — 5 баллов.

Только ответ с проверкой, что для него вероятность равна $\frac{2}{81}$, — 2 балла.

Вместо верного составлено уравнение $\frac{2}{k^n} = \frac{2}{81}$ — 1 балл.