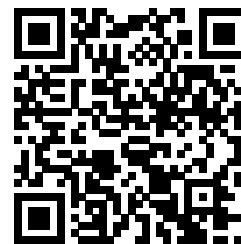




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, причём их сумма является простым числом, а произведение — квадратом натурального числа. (С. П. Павлов)

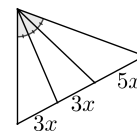
Ответ: 986431.

Решение. Заметим, что если точный квадрат кратен простому p , то он кратен и p^2 . Поэтому ни 5, ни 7 в искомое число входить не могут. Также нельзя использовать 0, иначе произведение будет равно нулю, а это не квадрат *натурального* числа. Остались цифры 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1, сумма которых равна 33. Число 33 не простое, поэтому хотя бы одну из цифр надо убрать. Поскольку порядок цифр в числе неважен и нам нужно получить как можно большее число, то убрать надо как можно меньшую цифру, при которой сумма оставшихся — простая, то есть двойку. Оставшиеся цифры расположим в порядке убывания. Число 986431 подходит, поскольку его сумма цифр равна 31, а произведение — $3^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 1 = (3^2 \cdot 2^3)^2$.

Критерии. Только ответ — 2 балла.

Упомянуто, что 5 и 7 не могут встречаться в числе — 1 балл.

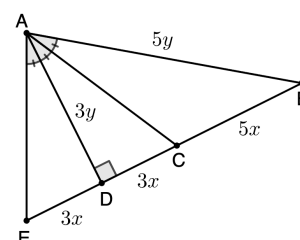
2. В остроугольном треугольнике провели обе трисектрисы одного из углов (то есть разделили его на 3 равные части), которые разделили противоположную сторону в отношении 5 : 3 : 3. Найдите периметр треугольника, если длина более короткой трисектрисы равна 6. (П. Д. Муленко)



Ответ: $21 + 3\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим вершину разделённого угла за A , а точки на противоположной стороне за B, C, D и E так, что $BC : CD : DE = 5 : 3 : 3$.

Отрезок AD в треугольнике EAC является не только биссектрисой, но и медианой, поэтому треугольник EAC — равнобедренный, и AD перпендикулярно BE , что означает, что AD — более короткая трисектриса. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник DAB . В нём отрезок AC является биссектрисой, поэтому $BC : CD = AB : AD$. Обозначим длину $BC = 5x$ (тогда $CD = 3x$), а длину $AB = 5y$ (тогда $AD = 3y$).



По теореме Пифагора, $AB^2 = BD^2 + AD^2$, или $(5y)^2 = (8x)^2 + (3y)^2$, откуда $16y^2 = 64x^2$, то есть $y = 2x$. Следовательно, $AD = 3y = 6x = 6$, поэтому $x = 1$ (и $y = 2$).

Таким образом, $AB = 10$, $BC = 5$ и $CD = DE = 3$. Для нахождения периметра треугольника ABE осталось найти длину AE , что можно сделать с помощью теоремы Пифагора в треугольнике ADE : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, откуда $AE = 3\sqrt{5}$, и периметр равен $10 + 5 + 3 + 3 + 3\sqrt{5} = 21 + 3\sqrt{5}$.

Критерии. Объяснено, что AD является более короткой биссектрисой — 1 балл.

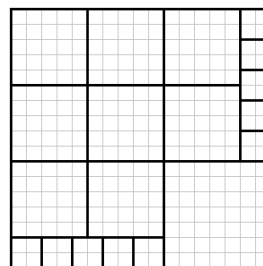
Задача решена в предположении, что $BC = 5$ и $CD = DE = 3$ — не более 2 баллов.

Не доказано, что $AD \perp BE$ (например, потому что «более короткая» понято как «кратчайшее расстояние») — -2 балла.

3. Квадрат разрезали на несколько квадратов. Обязательно ли среди полученных квадратов найдётся такой, сторона которого в целое количество раз меньше стороны исходного квадрата?

(А. А. Теслер)

Ответ: Нет. Например, квадрат со стороной 17 можно получить из квадратов со сторонами 2, 5 и 7, как показано на рисунке.



4. Инженер пишет программу для робота с металлоискателем, который будет искать клад в полоске из 100 клеток. Клад лежит в случайной клетке (все клетки равновероятны), также в случайную клетку высаживается робот (он может определить, в какой клетке находится). За одну минуту робот переходит в любую из соседних клеток. Когда робот оказывается в клетке с кладом, поиск завершён. Инженер понимает, что роботу нужно дойти сначала до одного из краёв полоски, а потом пойти обратно. Но не уверен, к какому краю лучше идти сначала — к тому, который ближе к стартовой клетке (стратегия А), или к дальнему (стратегия Б). Инженер хочет для каждой начальной клетки выбрать лучшую из двух стратегий, исходя из следующего:

- 1) прежде всего нужно минимизировать среднее время поиска клада;
- 2) если оно одинаково — максимизировать вероятность того, что клад найдётся в течение первых 10 минут (то есть что роботу придётся совершить от 0 до 10 шагов);
- 3) если обе стратегии всё ещё одинаково эффективны, то минимизировать максимально возможное время поиска.

Для скольких начальных клеток выгоднее стратегия А, а для скольких — стратегия Б?

(О. А. Пяйве, А. А. Теслер)

Ответ: для 80 клеток (11–90) выгоднее стратегия А, а для 18 клеток (2–10 и 91–99) — стратегия Б.

Решение. 0) Для клеток 1 и 100 обе стратегии приводят к одной и той же последовательности действий, поэтому эти клетки не учитываются ни там, ни там (для них нельзя сказать, что выгоднее А или что выгоднее Б).

1) Сравним среднее время поиска клада. Допустим, робот стоит на некой клетке, слева от него a клеток, а справа b клеток ($a + b = 99$). Пусть робот сначала идёт влево. Тогда для $a + 1$ левых клеток (включая начальную) время поиска будет равняться $0, 1, \dots, a - 1, a$. Если бы после этого робот телепортировался на исходную клетку, то для остальных b клеток время составило бы $a + 1, a + 2, \dots, a + b = 99$, и сумма ста времён составила бы $0 + 1 + \dots + 99$. Но когда робот дойдёт до левого края, он тратит a минут на возвращение на исходную позицию. В результате для каждой из оставшихся b клеток время увеличивается на a минут, и сумма времён поиска равна $(0 + 1 + \dots + 99) + ab$.

Если же робот идёт сначала вправо, а не влево, то числа a и b меняются ролями, но формула для суммы времён (а значит, и для среднего времени) не меняется. Значит, по первому критерию обе стратегии всегда одинаковы.

2) Если робот стоит в клетках 2–10 или 91–99, то при стратегии А некоторые из клеток, посещённых за первые 10 минут, совпадают, поэтому стратегия Б лучше по второму критерию. В остальных случаях стратегии одинаково эффективны по критерию 2, и нужно перейти к критерию 3.

3) Максимально возможное время поиска всегда меньше в стратегии А.

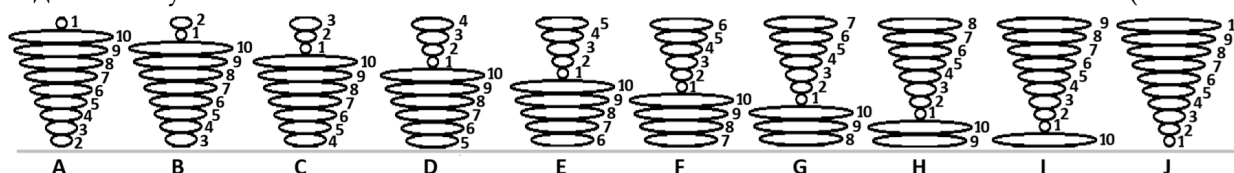
Критерии. Если решение в основном верное, то -1 балл за ошибку на ± 1 (неверно обработаны клетки 10, 91 или 11, 90). Также -1 балл, если нет оговорки про клетки 1 и 100 (например, они учтены как клетки, для которых выгоднее Б). Если оговорка есть, но из неё сделан иной вывод (например, что для

этих клеток выгоднее и А, и Б; или что в этих клетках стратегия А вообще невозможна) — баллов не снимать.

Доказано, что по критерию 1 стратегии всегда одинаковы — не менее 3 баллов.

5. Лёша коллекционирует волчки, которые можно запускать так, чтобы они сталкивались друг с другом. Каждый волчок состоит из 10 колец разного радиуса (от 1 до 10), надетых на ось в определённом порядке. Сейчас у Лёши есть 10 волчков, показанных на рисунке, и ещё 10 колец, из которых можно собрать новый волчок. Для любой пары волчков Лёша называет *недружелюбностью* минимальное расстояние, на которое могут сблизиться их оси при движении (например, для пары В и F недружелюбность равна 16, поскольку кольцо радиуса 6 в В находится на том же уровне, что и кольцо радиуса 10 в F). *Агрессивностью* волчка Лёша называет сумму недружелюбностей между ним и каждым из остальных волчков. Лёша хочет сделать новый волчок так, чтобы его агрессивность по отношению к старым волчкам была... (а) как можно меньше; (б) как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться в каждом из случаев?

(А. А. Теслер)

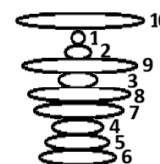


Ответ: (а) минимальная агрессивность равна 155; (б) максимальная — 180.

Решение (а). Рассмотрим волчок, у которого диски увеличиваются сверху вниз, то есть радиус верхнего диска равен 1, следующего 2, ..., нижнего 10. У него сумма недружелюбностей с волчками А, В, ..., J равна $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 11 = 100 + (1 + \dots + 10) = 155$. Уменьшить эту сумму нельзя, потому что для каждого уровня есть волчок, у которого на этом уровне 10, и недружелюбность с ним будет не меньше $10 + i$ (где i — радиус нового волчка на соответствующем уровне).



Решение (б). Недружелюбность 20 у нового волчка может быть только с одним из старых волчков (у которого 10 напротив 10 нового), 19 — максимум с двумя ($9+10$ и $10+9$), 18 — с тремя ($10+8$, $9+9$, $8+10$), 17 — максимум с четырьмя. Заметим, что волчок вида $(10, *, *, 9, *, 8, 7, *, *, *)$ (сверху вниз), где звёздочки заменяют числа от 1 до 6 в произвольном порядке, всё это реализует. (Один из таких волчков показан справа.) Ответ для него $20 + 19 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 17 \cdot 4 = 180$.



Критерии. Минимизация — 3 балла (2 балла — оценка, 1 балл — ответ с примером).

Максимизация — 4 балла (2 балла — оценка, 2 балла — ответ с примером).

6. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 5 или 8 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Через некоторое количество месяцев Буратино собрал с дерева весь урожай. Мог ли этот урожай составить ровно 2027 монет?

(П. Д. Муленко)

Ответ: нет.

Решение. За 5 месяцев будет минимум 3125 монет, за 3 месяца максимум 512 монет. Далее, остаток от деления на 3 после каждого хода умножается на 2; после первого хода он равен 2, после второго 1, после третьего 2, после четвёртого 1, поэтому после четырёх ходов 2027 получиться тоже не может.

Критерии. Указано (и обосновано), что трёх месяцев недостаточно, а пяти много — 2 балла.