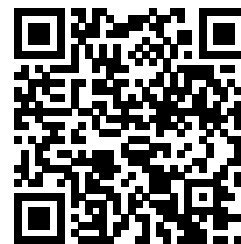




Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



## Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (Л. С. Корешкова)

**Ответ:** у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

**Решение.** Так как  $289 = 17^2$ , Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):

- белорусских монет больше  $289 \cdot 0,06 = 17,34 > 17$ , то есть их не менее 2 коробок;
- испанских монет больше  $289 \cdot 0,12 = 34,68 > 34 = 17 \cdot 2$ , то есть их не менее 3 коробок;
- эквадорских монет больше  $289 \cdot 0,24 = 69,36 > 68 = 17 \cdot 4$ , то есть их не менее 5 коробок;
- русских монет больше  $289 \cdot 0,36 = 104,04 > 102 = 17 \cdot 6$ , то есть их не менее 7 коробок.

Таким образом, у Ирины уже заняты  $2 + 3 + 5 + 7 = 17$  коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

**Критерии.** Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коробок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

2. В каждой клетке таблицы  $3 \times 5$  стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (А. А. Теслер)

**Ответ:** 120.

**Решение.** Сумма будет минимальной при использовании минимальных возможных чисел. Сумма чисел от 1 до 15 равна  $15 \cdot 16/2 = 120$ , что кратно и 3, и 5 (то есть сумма в строке должна быть равна  $120/3 = 40$ , а в столбце —  $120/5 = 24$ ).

Осталось привести пример заполненной таблицы:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 15 | 3  | 6  | 4  | 12 |
| 1  | 7  | 13 | 9  | 10 |
| 8  | 14 | 5  | 11 | 2  |

**Критерии.** Только ответ — 1 балл. Дан ответ и приведен пример — 3 балла. Дан ответ и приведено доказательство того, что меньше 120 быть не может, но примера нет — 3 балла.

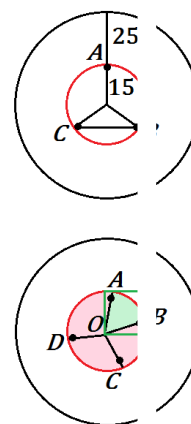
3. На острове радиусом 40 км находятся несколько колодцев. Колодец называется *отдалённым*, если на расстоянии ближе 25 км от него нет ни моря, ни другого колодца. Какое максимальное количество отдалённых колодцев может быть на острове? (А. А. Теслер)

**Ответ:** 3.

**Решение.**

Пусть  $O$  — центр острова. Колодцы должны располагаться в круге с центром  $O$  и радиусом 15, иначе они будут слишком близко к морю. Если вписать в этот круг равносторонний треугольник, то расстояние между его вершинами будет  $15\sqrt{3} > 25$ , что даёт пример для трёх колодцев.

Докажем, что 4 колодца не поместятся. Четыре колодца, расположенные в круге, можно обозначить буквами  $A, B, C, D$  в таком порядке, что  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360^\circ$  (возможно, один из этих углов больше  $180^\circ$ ). Пусть, например,  $\angle AOB$  — наименьший из этих углов, тогда  $\angle AOB \leq 90^\circ$ . Тогда существует сектор с центром  $O$  и углом  $90^\circ$ , содержащий точки  $A$  и  $B$ . Этот сектор помещается внутри квадрата со стороной 15, а расстояние между любыми двумя точками этого квадрата не больше  $15\sqrt{2} < 25$ .



**Критерии.** Только пример — 2 балла плюс ещё 1 балл за доказательство того, что он подходит.  
Только оценка — 4 балла.

4. Какому нечётному числу может быть равен НОД чисел  $2025n+1$  и  $5202n+1$ , где  $n$  — натуральное число? Укажите все возможности и докажите, что других нет. (С. П. Павлов)

**Ответ:** 1 или 353.

**Решение.** Пусть  $d$  — общий делитель чисел  $2025n+1$  и  $5202n+1$ . Тогда  $d$  является и делителем числа  $5202n+1 - (2025n+1) = 3177n = 9 \cdot 353 \cdot n$ . Так как оба выражения  $2025n+1$  и  $5202n+1$  не кратны 3 и взаимно просты с  $n$ , то искомым общим делителем может быть только делитель числа 353, то есть 1 или 353 (оно простое).

Заметим, что ответ 353 возможен, например, при  $n = 186$ . (Можно вместо поиска конкретного значения  $n$  сослаться на следующий факт: поскольку 353 и 2025 взаимно просты, то остатки от деления  $2025n$  на 353 принимают все возможные значения, в том числе и 352 при некотором значении  $n$ . А если  $2025n+1$  кратно 353, то и  $5202n+1$  тоже, поскольку их разность кратна 353.)

**Критерии.** Только ответ  $n = 1$  — 0 баллов.

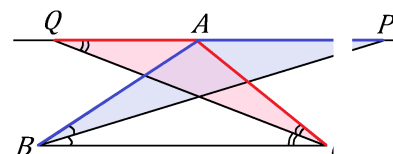
Если найдено, что НОД теоретически НОД может равняться 353, но не доказано, что такое  $n$  существует — 5 баллов.

5. Дан разносторонний тупоугольный треугольник  $ABC$  с целыми сторонами. Через вершину тупого угла  $A$  провели прямую, параллельную  $BC$ , и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов  $B$  и  $C$  как  $P$  и  $Q$ . Чему равно  $PQ$ , если  $BC = 4$ ? (П. Д. Муленко)

**Ответ:**  $PQ = 5$ .

**Решение.** Из неравенств треугольника  $ABC$  следует, что  $AB+AC > BC = 4$ . А так как треугольник тупоугольный, то сторона  $BC$ , лежащая напротив тупого угла  $A$ , является наибольшей, то есть обе стороны  $AB$  и  $AC$  должны быть меньше 4. Наконец, так как треугольник  $ABC$  разносторонний, одна из сторон  $AB$  и  $AC$  равна 2, а другая — 3.

Поскольку  $BP$  является биссектрисой угла  $B$ , то  $\angle PBC = \angle PBA$ . Далее, прямая  $PQ$  параллельна  $BC$ , поэтому  $\angle PBC = \angle BPA$ . Значит,  $\angle PBA = \angle BPA$ , то есть треугольник  $BAP$  — равнобедренный, и  $AP = AB$ . Аналогично из равнобедренного треугольника  $QAC$  получаем, что  $QA = AC$ , а тогда искомая длина равна  $PQ = PA + AQ = AB + AC = 2 + 3 = 5$ .



**Критерии.** Замечено равенство накрест лежащих углов — 1 балл.

Доказано, что стороны  $AB$  и  $AC$  равны 2 и 3 — 3 балла.

Замечено, что на картинке два равнобедренных треугольника — 3 балла.

6. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна  $2/81$ . Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? (П. Д. Муленко)

**Ответ:** в квизе 5 вопросов по 3 варианта ответа в каждом.

**Решение.** Обозначим количество вопросов за  $n$ , а количество вариантов ответа в каждом вопросе за  $k$ . Вероятность угадать ответ на очередной вопрос равна  $1/k$ , то есть вероятность угадать ответы на все  $n$  вопросов равна  $1/k^n$ .

Если же на какой-то вопрос вы сперва ответили неверно с вероятностью  $\frac{k-1}{k}$ , то вы можете исправить свой ответ и повторно угадать правильный среди  $k-1$  оставшихся. Таким образом, полная вероятность угадать ответ на вопрос с ошибкой равна

$$\frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k},$$

и есть  $n$  способов выбрать вопрос, на который вы ответите со второй попытки. Итого, полная вероятность успешно пройти квиз наугад равна

$$\frac{1}{k^n} + \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}.$$

Упрощая получившееся уравнение, получаем  $81(n+1) = 2k^n$ . Правая часть чётна, то есть  $n+1$  чётно, откуда само  $n$  нечётно (и больше одного):

$n = 3$ :  $81 \cdot (3+1) = 2k^3 \Rightarrow k^3 = 81 \cdot 4 / 2 = 162$  — не подходит, так как 162 не куб;

$n = 5$ :  $81 \cdot (5+1) = 2k^5 \Rightarrow k^5 = 81 \cdot 6 / 2 = 243$  — подходит,  $k = 3$ .

Левая часть делится на 81, то есть  $k$  обязательно кратно 3. Поэтому при дальнейшем увеличении  $n$  левая часть будет каждый раз увеличиваться на 162, а правая — как минимум в 9 раз. Иными словами, при  $n > 5$  правая часть всегда будет больше левой, и новых решений не найдётся.

Итого в квизе  $n = 5$  вопросов, в каждом из которых по  $k = 3$  варианта ответа.

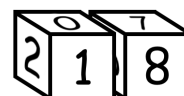
**Критерии.** Вывод уравнения  $\frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}$  — 3 балла. Если решение этого уравнение угадано — +1 балл. Если не обосновано, что нет решений при  $n > 5$  — 5 баллов.

Только ответ с проверкой, что для него вероятность равна  $\frac{2}{81}$ , — 2 балла.

Вместо верного составлено уравнение  $\frac{2}{k^n} = \frac{2}{81}$  — 1 балл.

7. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей.

Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?



Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет.

(М. В. Карлукова)

**Решение.** Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Это 7 различных цифр, но две из них — 6 и 9 — можно заменить одной, поскольку другая получается из неё переворотом.

Итак, нужно распределить цифры от 3 до 8 по двум кубам (на каждом по три цифры). Выбрать 3 цифры на первый кубик можно  $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$  способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на  $\{3, 4, 5\}$  для первого кубика и  $\{6, 7, 8\}$  для второго равнозначно разбиению на  $\{6, 7, 8\}$  для первого кубика и  $\{3, 4, 5\}$  для второго — поэтому есть всего  $20/2 = 10$  различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.

Рассмотрим один из кубиков. На нём где-то написана цифра 1, и есть только один способ поставить кубик так, чтобы она была спереди в правильном положении. Остальные 5 граней можно заполнить  $5! = 120$  способами без учёта вращения цифр. На каждой грани есть 4 способа повернуть цифру, кроме двух цифр 0 и одной цифры 8, для которых таких способов по 2.

**Ответ:**  $10 \cdot 120^2 \cdot 4^7 \cdot 2^3 = 18\,874\,368\,000$  способов.

**Критерии.** Если ответ найден как арифметическое выражение, но не посчитан до конца, то не больше 6 баллов. Если найден ответ без учёта вращений цифр на гранях (9000), то ставится 3 балла. За ошибку в 2 раза (20 способов распределения цифр по кубикам вместо 10) снимается балл.