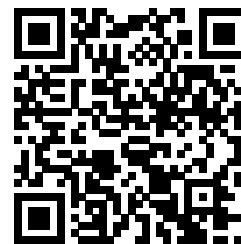




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



задачи для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку O . При повороте на 90° вокруг точки O этот треугольник перешёл в треугольник DCE . Оказалось, что площадь $ABCD$ в 4 раза меньше площади $ADCE$. Найдите отношение $AO : OC$.
(П. Д. Муленко)
2. У тетраэдра $ABCD$ все три плоских угла при вершине A равны 60° , а длина каждого ребра — целое число. Обязательно ли все грани тетраэдра равны?
(А. А. Теслер)
3. В школе есть Директор, Учитель и 50 детей. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 0 до 100 конфет включительно. Дед Мороз будет по очереди вызывать всех детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт вопрос Деду Морозу, а потом ещё один вопрос одному из друзей. Все вопросы должны подразумевать только ответы «да» и «нет»; нельзя спрашивать о том, чего собеседник не знает; все отвечают друг другу правду. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Придумайте, как действовать детям, чтобы по числу, полученному от Учителя, Директор смог определить, сколько конфет у Деда Мороза.
(И. М. Туманова, А. А. Теслер)
4. У Васи есть калькулятор с красной кнопкой. Если на экране написано число x , то при нажатии на кнопку калькулятор с вероятностью 50% заменит его на x^2 , а с вероятностью 50% попытается заменить на $\log_2 x$ (и взорвётся, если $\log_2 x$ не определён). Вася решил испытать удачу: он ввёл в калькулятор число 4 и хочет десять раз подряд нажать красную кнопку. Какова вероятность, что Вася сумеет это сделать и калькулятор не взорвётся?
(А. А. Теслер)
5. На шахматной доске лежит квадрат, площадь которого вдвое больше, чем площадь одной клетки, а стороны параллельны диагоналям клеток. Какую долю от площади квадрата может составлять та его часть, которая окрашена в чёрный цвет?
(А. А. Теслер)
6. Многочлен $P(x)$ на интервале $x \in (0; 1)$ дважды принимает значение 0 и дважды — значение 1. Докажите, что существует такая точка $a \in (0; 1)$, что $|P''(a)| > 2$.
(А. А. Теслер)