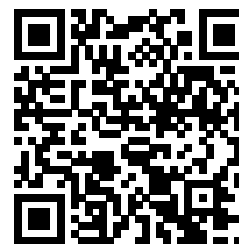




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

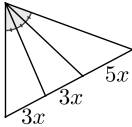


задачи для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

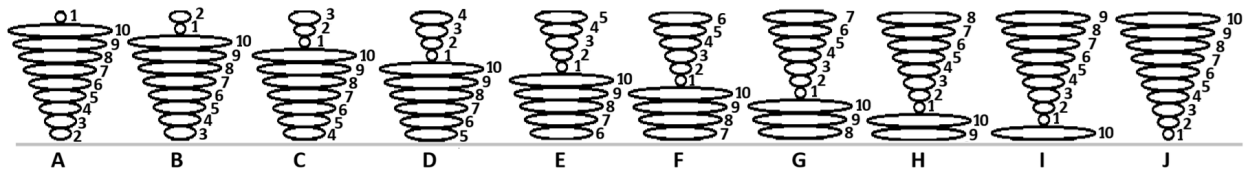
1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, причём их сумма является простым числом, а произведение — квадратом натурального числа. (С. П. Павлов)
2. В остроугольном треугольнике провели обе трисектрисы одного из углов (то есть разделили его на 3 равные части), которые разделили противоположную сторону в отношении $5 : 3 : 3$. Найдите периметр треугольника, если длина более короткой трисектрисы равна 6. (П. Д. Муленко)

3. Квадрат разрезали на несколько квадратов. Обязательно ли среди полученных квадратов найдётся такой, сторона которого в целое количество раз меньше стороны исходного квадрата? (А. А. Теслер)
4. Инженер пишет программу для робота с металлоискателем, который будет искать клад в полоске из 100 клеток. Клад лежит в случайной клетке (все клетки равновероятны), также в случайную клетку высаживается робот (он может определить, в какой клетке находится). За одну минуту робот переходит в любую из соседних клеток. Когда робот оказывается в клетке с кладом, поиск завершён. Инженер понимает, что роботу нужно дойти сначала до одного из краёв полоски, а потом пойти обратно. Но не уверен, к какому краю лучше идти сначала — к тому, который ближе к стартовой клетке (стратегия А), или к дальнему (стратегия Б). Инженер хочет для каждой начальной клетки выбрать лучшую из двух стратегий, исходя из следующего:
 - 1) прежде всего нужно минимизировать среднее время поиска клада;
 - 2) если оно одинаково — максимизировать вероятность того, что клад найдётся в течение первых 10 минут (то есть что роботу придётся совершить от 0 до 10 шагов);
 - 3) если обе стратегии всё ещё одинаково эффективны, то минимизировать максимально возможное время поиска.

Для скольких начальных клеток выгоднее стратегия А, а для скольких — стратегия Б?

(О. А. Пяйве, А. А. Теслер)

5. Лёша коллекционирует волчки, которые можно запускать так, чтобы они сталкивались друг с другом. Каждый волчок состоит из 10 колец разного радиуса (от 1 до 10), надетых на ось в определённом порядке. Сейчас у Лёши есть 10 волчков, показанных на рисунке, и ещё 10 колец, из которых можно собрать новый волчок. Для любой пары волчков Лёша называет *недружелюбностью* минимальное расстояние, на которое могут сблизиться их оси при движении (например, для пары *B* и *F* недружелюбность равна 16, поскольку кольцо радиуса 6 в *B* находится на том же уровне, что и кольцо радиуса 10 в *F*). *Агрессивностью* волчка Лёша называет сумму недружелюбностей между ним и каждым из остальных волчков. Лёша хочет сделать новый волчок так, чтобы его агрессивность по отношению к старым волчкам была... (а) как можно меньше; (б) как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться в каждом из случаев?

(А. А. Теслер)



6. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 5 или 8 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Через некоторое количество месяцев Буратино собрал с дерева весь урожай. Мог ли этот урожай составить ровно 2027 монет?

(П. Д. Муленко)