ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

11 КЛАСС

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное $k-1$. Расположим эти $k-1$ число в порядке не убывания: $a_{i_1} \le a_{i_2} \le \cdots \le a_{i_{k-1}}$.
Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образуем два множества позиций, которые заполнены: $\{i_1, i_3, \ldots\}$ и $\{i_2, i_4, \ldots\}$, беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 2023. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 2023 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация.
ОТВЕТ: Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

Задача 2

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:
$X_1 + X_2 = 10$ (1)
$Y_1 + Y_2 = X_1 + 3$ (2)
$8 + Y_4 = X_2 + 5$ (3)
$Y_5 + Y_6 = 12$ (4)
Необходимо найти: $\Sigma_1 = Y_1 + 8 + Y_5$, $\Sigma_2 = \mathrm{Y}_4$, $\Sigma_3 = \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_6$.

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ S_1, при этом использовалось одно и то же значение k в подписи, поэтому:
$9 = (18X_1 + S_1k)(mod\ 28)$,
$1 = (18Y_2 + S_1k)(mod\ 28)$. Отсюда получим $8 = 36 = (18(X_1 - Y_2))(mod\ 28)$.
Следовательно, $X_1 - Y_2 = 2$. С учетом (2) имеем: $Y_1 = X_1 - Y_2 + 3 = 5$.

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №5 и №12:

$18 = (27 \cdot 3 + S_3 k)(mod\ 28)$,
$20 = (27Y_6 + S_3 k)(mod\ 28)$. Отсюда получим $-2 = 54 = (27(3 - Y_6))(mod\ 28)$.
Следовательно, $3 - Y_6 = 2$, $Y_6 = 1$.
С учетом (4) имеем: $Y_5 = 11$ и уже находится $\Sigma_1 = 5 + 8 + 11 = 24$.

Теперь обратим внимание на транзакции №9 и №10, осуществленные владельцем 2, для которых, как нетрудно заметить, использовались одинаковые k, но с разными знаками, т.к. $(2 \cdot 15) = 1(mod\ 29)$.
Поэтому:
$11 = (2 \cdot 8 + S_2 k)(mod\ 28)$,
$20 = (15Y_4 - S_2 k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $15Y_4 = 31 - 16 = 15(mod\ 28)$, $Y_4 = 1 = \Sigma_2$.

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 30, то $\Sigma_3 = 30 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$

ОТВЕТ: (24,1,5).

Задача 3

a) Так как НОД(2,7)=НОД(6,7)=1, то $g(x) = 2f(x)(mod\ 7)$ и $h(x) = 6f(x)(mod\ 7)$ являются перестановками. Но тогда, например, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = 6f(x)$ и выполняется
$g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(mod\ 7)$.
b) $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n+1)n = n(mod\ (2n))$.
С другой стороны, если указанное условии пункта b) представление существует, то
$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n+1)n = 0(mod\ (2n))$.
Что доказывает невозможность указанного представления.

Задача 4

a) из условия задачи и равенства $a^{p-1} = 1(mod\ p)$ следует $a^{k(p-1)+1} = a(mod\ p)$ для любого натурального k. Тогда при $k = \frac{q-1}{2}$ получим $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ p)$.
Аналогично $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ q)$. Так как p, q – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ N)$. Пункт а) доказан.
d) предположим, что $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 21240913$. Тогда получим систему уравнений $p \cdot q = 42494861$, $\quad (p-1) \cdot (q-1) = 21240913$.
Решая полученную систему, находим $p = 6547, q = 7057$

ОТВЕТ: $p = 6547, q = 7057$.

Заметим, что точки A_1 и O_1 совпадают. Действительно, пусть минимум достигается на конфигурации, где это не так. Но тогда, сдвинув точку A_1 в точку O_1, мы длину проводов уменьшим. Таким образом, компьютер A_1 и сервер O_1 должны оказаться в некоторой точке K ($K = A_1 = O_1$).

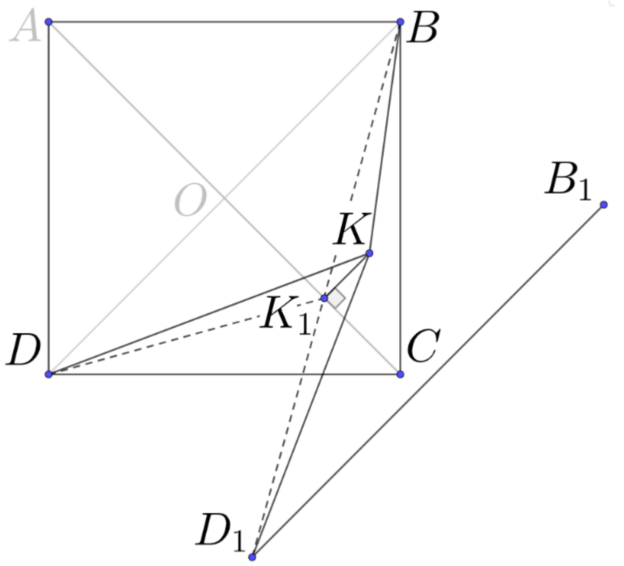
Покажем, что K лежит на диагонали AC. Предположим обратное. Пусть K_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую AC. Покажем, что сумма расстояний от точки K_1 до вершин B, C, D , которую обозначим $S_{K_1} = K_1B + K_1C + K_1D$, меньше аналогичной суммы $S_K = KB + KC + KD$. Длина проекции меньще длины наклонной, поэтому $K_1C < KC$. Чтобы доказать, что

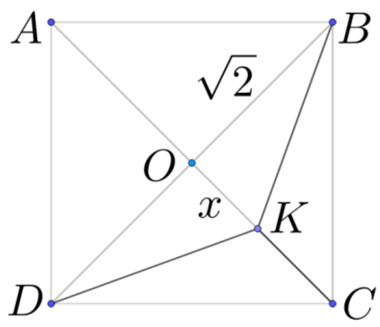
K

$$_1D + K_1B < KD + KB, \tag{1}$$

отразим отрезок BD относительно прямой KK_1 (при этом точка B перейдет в точку B_1, точка D – в точку D_1). Точки B, K_1, D_1 окажутся на одной прямой. Тогда $K_1D + K_1B = K_1D_1 + K_1B = D_1B$, и при этом $KD + KB = KD_1 + KB > D_1B$. Неравенство (1) доказано. Следовательно, $S_{K_1} < S_K$, а значит искомая точка K должна лежать на диагонали.

Пусть $OK = x$. Тогда $S(x) = KC + KB + KD = 2\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2} - x$. На отрезке $[0, \sqrt{2}]$





функция $S(x)$ имеет (единственный) минимум в точке $x_0 = \sqrt{2/3}$ (x_0 – корень уравнения $S'(x) = 2x/\sqrt{x^2+2} - 1 = 0$), и$S(x_0) = 2\sqrt{2/3+2} + \sqrt{2} - \sqrt{2/3} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

ОТВЕТ: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

ОТВЕТ: 2,8,9,15.