11 класс XXXV МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
им. И.Я. ВЕРЧЕНКО ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ
(сайт олимпиады www.v-olymp.ru) 30.11.2025

1 вариант

1. В криптосистеме RSA натуральное число n такое, что $n = p \cdot q$, где p и q – нечетные простые числа, называется модулем системы. Найдите все возможные значения модуля RSA, если известно, что $6 \cdot \sqrt[3]{n^2} < n < 6 \cdot \sqrt[3]{n^2 + 1000}$.

2. Рассмотрим множество $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Определим функцию $\rho(c) = r_8\left(2c + \delta(c)\right)$, $c \in A$. Здесь

$$\delta(c) = \begin{cases} 0, \text{если } c < 4; \\ 1, \text{если } c \geq 4, \end{cases}$$

а $r_8(x)$ – остаток от деления числа x на 8. Например, $\rho(5) = r_8\left(2 \cdot 5 + \delta(5)\right) = r_8(10 + 1) = 3$.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in A$. Определим на A новую функцию $f(\mathrm{c}) = \rho(\rho(\mathrm{c} + \gamma_1) + \gamma_2)$. Известно, что $f(0) = 1, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 4, f(4) = 6, f(5) = 3, f(6) = 7, f(7) = 2$. Найдите γ_1 и γ_2.

3. Сколько всего чисел от 1225 до 2025, не делящихся на 9 и не являющихся полными квадратами? Чему равна сумма всех таких чисел?

4. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 60! ($60! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$).

Указание. Вам могут понадобиться следующие значения натуральных логарифмов: $\ln 60 \approx 4{,}0943, \ln 10 \approx 2{,}3026$.

5. Рассмотрим функцию $y(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Известно, что максимальное по модулю значение этой функции на отрезке $[-1, 1]$ равно 1. Каким самое большое на этом отрезке (при надлежащем выборе коэффициентов a, b, c) может оказаться модуль ее производной $y'(x)$? Приведите пример таких a, b, c, при которых величина $\max\limits_{x \in [-1,1]} |y'(x)|$ максимальна.

6. Рассмотрим полубайты – последовательности из 0 и 1 длины 4. Полубайты $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\boldsymbol{b} = \left(b_1, b_2, b_3, b_4\right)$ можно складывать по правилу: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, a_3 \oplus b_3, a_4 \oplus b_4)$. Здесь $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Например, $(0,1,0,1) + (0,1,1,1) = (0,0,1,0)$.
   1) Набор $S = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ из трех различных полубайт назовем *замкнутым*, если сумма двух различных полубайт из S снова принадлежит S (то есть $(\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\gamma}_j) \in S$ при любых $\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j \in S$, $i \neq j$). Найдите количество всех замкнутых упорядоченных наборов $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ (слово *упорядоченных* означает, что порядок существенен: $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ и $(\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_3)$ – это разные наборы!).
   2) Полубайт (a_1, a_2, a_3, a_4) назовем *невырожденным*, если $a_1 a_4 \oplus a_2 a_3 = 1$. Найдите количество замкнутых упорядоченных наборов $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$, состоящих из невырожденных полубайт.