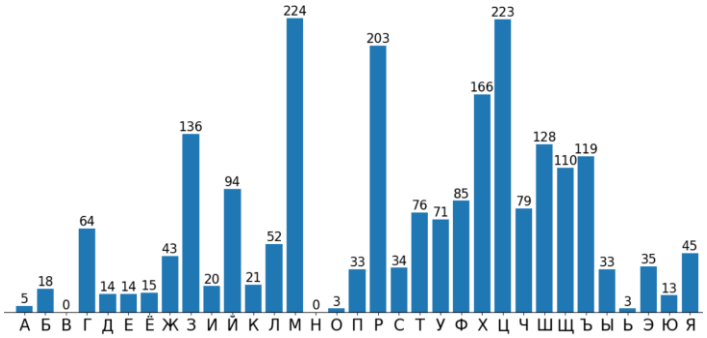
9-10 класс XXXV МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
им. И.Я. ВЕРЧЕНКО ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ
(сайт олимпиады www.v-olymp.ru) 30.11.2025

1 вариант

1. Текст на русском языке зашифровали следующим образом: каждую букву исходного текста заменили буквой, находящейся на некотором фиксированном числе позиций правее неё в алфавите, одном и том же для каждой буквы (*шифр Цезаря*). Например, в шифре со сдвигом на 3 буква **А** была бы заменена на **Г**, **Б** станет **Д**, и так далее. Алфавит считается записанным по кругу; так, в приведённом примере буква **Ю** переходит в **Б**, **Я** перейдет в **В**. Число, на которое мы сдвигаем, называется *ключом шифра*. В *зашифрованном* тексте подсчитали количества встретившихся в нем букв (рис.). Определите ключ шифра.



2. В криптосистеме RSA натуральное число n такое, что $n = p \cdot q$, где p и q – нечетные простые числа, называется *модулем системы*. Найдите все возможные значения модуля RSA, если известно, что $5 \cdot \sqrt[3]{n^2 - 300} < n < 5 \cdot \sqrt[3]{n^2}$.

3. Сколько всего чисел от 1225 до 2025, не делящихся на 3 и не являющихся полными квадратами? Чему равна сумма всех таких чисел?

4. Рассмотрим множество $A = \{0,1,2,3\}$. Определим функцию $\rho(c) = r_4\left(2c + \delta(c)\right),\ c \in A$. Здесь

$$\delta(c) = \begin{cases} 0, \text{если } c < 2; \\ 1, \text{если } c \geq 2, \end{cases}$$

а $r_4(x)$ – остаток от деления числа x на 4. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in A$. Определим на A новую функцию $f(a) = \rho(\rho(a + \gamma_1) + \gamma_2)$. Известно, что $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$. Найдите γ_1 и γ_2.

5. Рассмотрим функцию $y(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$ и ордината вершины параболы больше или равна минус один. Известно, что максимальное по модулю значение этой функции на отрезке $[-1, 1]$ равно 1. Найдите максимальное значение функции $f(x) = |2ax + b|$ на этом отрезке (при надлежащем выборе коэффициентов a, b, c). Приведите пример таких a, b, c, при которых $f(x)$ достигает максимума.

6. Рассмотрим полубайты – последовательности из 0 и 1 длины 4. Полубайты $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ можно складывать по правилу: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, a_3 \oplus b_3, a_4 \oplus b_4)$. Здесь $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Например, $(0,1,0,1) + (0,1,1,1) = (0,0,1,0)$. Набор $S = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ из трех различных полубайт назовем *замкнутым*, если сумма двух различных полубайт из S снова принадлежит S (то есть $(\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\gamma}_j) \in S$ при любых $\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\gamma}_j \in S,\ i \neq j$). Найдите количество всех замкнутых упорядоченных наборов $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ (слово *упорядоченных* означает, что порядок существенен: $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ и $(\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_3)$ – это разные наборы!).