10 класс. I вариант

Задача 1.

Рассмотрим прыжок с пола. Обозначим начальную скорость кошки за $\vec{v}$, а время полёта за t, тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} v_x t = L, \\ v_y t - gt^2/2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

получим связь проекций скорости на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси с длиной прыжка L:

$$v_x v_y = gL/2\,. \tag{2}$$

При прыжке с доски это соотношение останется прежним, но начальная скорость кошки относительно пола $\tilde{\vec{v}}$ будет другой, и кошка прыгнет на расстояние $\tilde{L}$:

$$\tilde{v}_x \tilde{v}_y = g\tilde{L}/2\,. \tag{3}$$

Скорость $\tilde{\vec{v}}$ можно найти по правилам перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую (в начале фазы полета доску уже можно считать инерциальной системой). Из условия следует, что скорость кошки относительно доски в начале фазы полета равна начальной скорости $\vec{v}$ относительно пола в первом прыжке, следовательно

$$\tilde{v}_x = v_x - u\,, \quad \tilde{v}_y = v_y\,, \tag{4}$$

где u — скорость доски относительно пола, с которой она поедет в противоположную прыжку сторону. Найдем эту скорость. Вдоль горизонтальной оси внешние силы на кошку и доску не действуют, следовательно выполняется закон сохранения x-проекции импульса, запишем его в системе пола:

$$m(v_x - u) - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv_x}{M+m}\,. \tag{5}$$

Теперь мы можем найти искомое расстояние, поделив (3) на (2) с учетом (4) и (5):

$$\tilde{L} = \frac{\tilde{v}_x}{v_x} L = \frac{M}{M+m} L = \frac{2}{3} L\,. \tag{6}$$

Ответ: Кошка приземлится на расстоянии $2L/3$ от места второго толчка.

Задача 2.

Когда стакан движется с ускорением, в системе отсчета стакана возникает действующая на воду сила инерции. Она направлена горизонтально противоположно вектору ускорения стакана. В результате суммарного действия сил тяжести и инерции вода приливает к стенке стакана. Часть воды может вылиться в процессе движения. Чтобы понять, какое количество воды останется в стакане, достаточно рассмотреть момент времени, когда ускорение стакана максимально и равно по модулю a. При этом не имеет значения, куда направлено ускорение, т. е. увеличивается или уменьшается проекция скорости стакана (в первом случае вода выливается через заднюю стенку, во втором — через переднюю). Для определенности будем считать, что в интересующий нас момент времени ускорение стакана направлено вправо, а вода в стакане соответственно смещается влево (см. Рис. 1). Пусть ускорение достаточно велико, так что какая-то часть воды вылилась. С учетом силы инерции можно сказать, что вода в системе отсчета, связанной со стаканом, находится в эффективном гравитационном поле, имеющим напряженность $\vec{g}_* = \vec{g} + \vec{a}$. Очевидно, что поверхность воды тогда будет перпендикулярна вектору $\vec{g}_*$. При этом оставшаяся вода будет иметь в плоскости рисунка треугольную форму, оголяя дно. Отметим, что вода могла бы выливаться, имея форму трапеции, касаясь обеих стенок стакана, только если бы высота стакана не превосходила $2H$. Можно записать следующее соотношение:

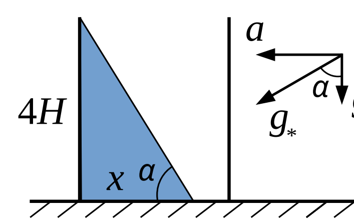


Рис. 1

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{g} = \frac{4H}{x}\,. \tag{7}$$

Заметим, что можно было не переходить в неинерциальную систему отсчета, а рассматривать движение жидкости в исходной (лабораторной) системе. Для этого выделим мысленно небольшой объем воды массой m (см. Рис. 2). В лабораторной системе отсчета на него действует всего две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\mathrm{A}}$. При этом сила Архимеда направлена перпендикулярно поверхности воды. Второй закон Ньютона для выделенного элемента воды в проекции на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид:

$$F_{\mathrm{A}} \sin\alpha = ma\,, \tag{8}$$

$$F_{\mathrm{A}} \cos\alpha - mg = 0\,. \tag{9}$$

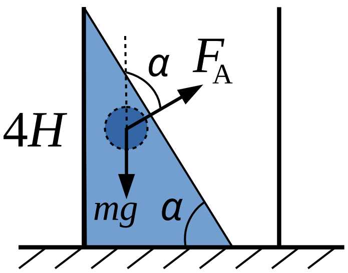


Рис. 2

Отсюда мы легко приходим к соотношению (7).

Найдем неизвестный катет x:

$$x = 4H\,\frac{g}{a}\,. \tag{10}$$

Объем воды пропорционален площади соответствующей фигуры на рисунке. Эта площадь равна $2Hx = 8(g/a)H^2$. В конечный момент времени, когда стакан покоится, вода имеет форму прямоугольника с площадью $3hH$. Приравнивая эти площади, получаем

$$h = \frac{8g}{3a}\,H\,. \tag{11}$$

Равенство высот $h = H$ имеет место при $a = 8g/3$. Очевидно, что это минимальное значение ускорения a, при котором происходит выливание воды из стакана и реализуется ситуация, изображенная на Рис. 1. Таким образом, при $a \leqslant 8g/3$ уровень воды остается прежним ($h = H$), а при $a > 8g/3$ имеем $h = (8/3)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 3.

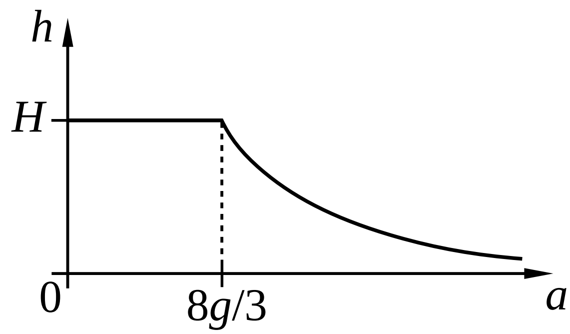


Рис. 3

<u>Ответ</u>: Если $a \leqslant 8g/3$, то $h = H$; если $a > 8g/3$, то $h = (8/3)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 3.

Задача 3.

Обозначим массы поршней в узком и широком сосудах через m_1 и m_2 соответственно. Для удобства введем также $S_1 \equiv S$ и $S_2 \equiv 3S$. Предположим, что в состоянии равновесия большой поршень находится выше маленького на высоту H. Приравнивая давления жидкости на уровне маленького поршня, получаем (p_0 — внешнее давление):

$$p_0 + \frac{m_1 g}{S_1} = p_0 + \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g H \qquad \Longleftrightarrow \qquad H = \frac{1}{\rho}\left(\frac{m_1}{S_1} - \frac{m_2}{S_2}\right)\,. \tag{12}$$

При надавливании на поршень и его перемещении на расстояние x вниз над системой совершается положительная работа. Эта работа равна

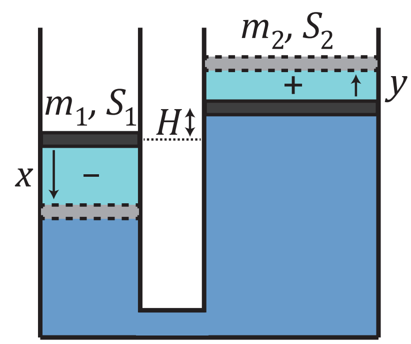


Рис. 4

изменению потенциальной энергии системы ΔU. Когда поршень отпускают, начинаются колебания, которые постепенно затухают из-за наличия вязкости. Система возвращается в исходное состояние механического равновесия. Поскольку сообщающиеся сосуды теплоизолированы, вся совершенная над системой работа приводит к ее нагреву, то есть

$$\Delta U = C\Delta T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta T = \frac{\Delta U}{C}\,. \tag{13}$$

Поскольку объем жидкости сохраняется, перемещения маленького x и большого y поршней связаны соотношением

$$S_1 x = S_2 y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{S_1}{S_2}\,x\,. \tag{14}$$

Рассчитаем изменение потенциальной энергии системы по сравнению с состоянием равновесия. Маленький поршень опускается на величину x, что уменьшает энергию на величину m_1gx. Большой поршень поднимается на y. Соответствующее изменение энергии равно m_2gy. Разберемся с потенциальной энергией жидкости. Все изменение можно представить как перенос жидкости массой $\rho x S_1$ из одного сосуда в другой из области, помеченной на Рис. 4 знаком "$-$", в область, отмеченную знаком "$+$". При этом центр масс перемещаемого объема жидкости поднимается с уровня $-x/2$ относительно маленького поршня на уровень $H + y/2$. Таким образом, полное изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = -m_1gx + m_2gy + \rho x S_1 g\left[H + \frac{y}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]\,. \tag{15}$$

С учетом (12) и (13) имеем

$$\Delta T = \frac{\rho g x^2 S_1}{2C}\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) = \frac{2\rho g x^2 S}{3C}. \tag{16}$$

В решении мы предполагали, что в равновесии большой поршень находится выше маленького, однако все выкладки остаются в силе и в обратном случае, если считать H отрицательным.

Ответ: Изменение температуры системы составляет $2\rho g x^2 S/(3C)$.

Задача 4.

Обозначим длину ребра кубика за a, удельные сопротивления материалов, из которых изготовлены кубики, через ρ_1 и ρ_2. Согласно условию линии тока направлены всегда перпендикулярно граням, к которым подключен источник. Поэтому для определения сопротивлений можно пользоваться формулой $R = \rho l/S$, где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения. Сопротивления кубиков равны

$$R_1 = \frac{\rho_1 a}{a^2} = \frac{\rho_1}{a}\,, \qquad R_2 = \frac{\rho_2 a}{a^2} = \frac{\rho_2}{a}\,. \tag{17}$$

На левой части Рис. 5 кубики подключены к источнику последовательно, поэтому полное сопротивление составляет

$$R_{\mathrm{I}} = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{a}\,. \tag{18}$$

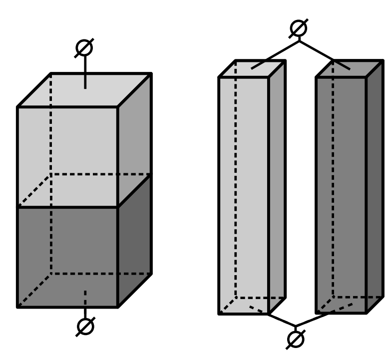


Рис. 5

При изменении формы кубиков объем сохраняется. Следовательно, увеличение длины проводника в λ раз приводит к уменьшению площади поперечного сечения в λ раз. В результате сопротивления становятся равными

$$R_1' = \frac{\rho_1 \lambda a}{a^2/\lambda} = \frac{\lambda^2 \rho_1}{a}\,, \qquad R_2' = \frac{\rho_2 \lambda a}{a^2/\lambda} = \frac{\lambda^2 \rho_2}{a}\,. \tag{19}$$

На правой части Рис. 5 вытянутые кубики подключены параллельно. Полное сопротивление равно

$$R_{\mathrm{II}} = \frac{R_1' R_2'}{R_1' + R_2'} = \frac{\lambda^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) a} \,. \tag{20}$$

По условию в обоих случаях в цепи течет одинаковый ток. Значит, сопротивления R_{I} и R_{II} должны совпадать:

$$R_{\mathrm{I}} = R_{\mathrm{II}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\rho_1 + \rho_2}{a} = \frac{\lambda^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) a} \,. \tag{21}$$

Сокращая на a и вводя переменную $x \equiv \rho_1/\rho_2$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + \left(2 - \lambda^2\right) x + 1 = 0 \,. \tag{22}$$

Решения этого уравнения

$$x_\pm = \frac{\left(\lambda^2 - 2\right) \pm \sqrt{\left(\lambda^2 - 2\right)^2 - 4}}{2} \,. \tag{23}$$

Отметим, что $x_+ x_- = 1$. Таким образом, x_+ дает отношение большего удельного сопротивления к меньшему, а x_- — обратную величину. То есть оба решения квадратного уравнения описывают одну и ту же ситуацию. Решения имеют смысл только при $\lambda \geqslant 2$. В противном случае условие задачи не может быть реализовано. При $\lambda = 2$, естественно, $x_+ = x_- = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$.

Ответ: Отношение большего удельного сопротивления к меньшему равно $[(\lambda^2 - 2) + \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}]/2$. Решение существует только при $\lambda \geqslant 2$.

Задача 5.

См. решение задачи 5 в варианте для 11 класса.

Районный тур 2022/23. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Рассмотрим прыжок с пола. Обозначим начальную скорость кошки за $\vec{v}$, а время полёта за t, тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} v_x t = L, \\ v_y t - gt^2/2 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

получим связь проекций скорости на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси с длиной прыжка L:

$$v_x v_y = gL/2\,. \tag{25}$$

При прыжке с доски это соотношение останется прежним, но начальная скорость кошки относительно пола $\vec{\tilde{v}}$ будет другой, и кошка прыгнет на расстояние $\tilde{L}$:

$$\tilde{v}_x \tilde{v}_y = g\tilde{L}/2\,. \tag{26}$$

Скорость $\vec{\tilde{v}}$ можно найти по правилам перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую (в начале фазы полета доску уже можно считать инерциальной системой). Из условия следует, что скорость кошки относительно доски в начале фазы полета равна начальной скорости $\vec{v}$ относительно пола в первом прыжке, следовательно

$$\tilde{v}_x = v_x - u\,, \quad \tilde{v}_y = v_y\,, \tag{27}$$

где u — скорость доски относительно пола, с которой она поедет в противоположную прыжку сторону. Найдем эту скорость. Вдоль горизонтальной оси внешние силы на кошку и доску не действуют, следовательно выполняется закон сохранения x-проекции импульса, запишем его в системе пола:

$$m(v_x - u) - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv_x}{M+m}\,. \tag{28}$$

Теперь мы можем найти искомое расстояние, поделив (26) на (25) с учетом (27) и (28):

$$\tilde{L} = \frac{\tilde{v}_x}{v_x} L = \frac{M}{M+m} L = \frac{3}{4} L\,. \tag{29}$$

Ответ: Кошка приземлится на расстоянии $3L/4$ от места второго толчка.

Задача 2.

Когда стакан движется с ускорением, в системе отсчета стакана возникает действующая на воду сила инерции. Она направлена горизонтально противоположно вектору ускорения стакана. В результате суммарного действия сил тяжести и инерции вода приливает к стенке стакана. Часть воды может вылиться в процессе движения. Чтобы понять, какое количество воды останется в стакане, достаточно рассмотреть момент времени, когда ускорение стакана максимально и равно по модулю a. При этом не имеет значения, куда направлено ускорение, т. е. увеличивается или уменьшается проекция скорости стакана (в первом случае вода выливается через заднюю стенку, во втором — через переднюю). Для определенности будем считать, что в интересующий нас момент времени ускорение стакана направлено вправо, а вода в стакане соответственно смещается влево (см. Рис. 6). Пусть ускорение достаточно велико, так что какая-то часть воды вылилась. С учетом силы инерции можно сказать, что вода в системе отсчета, связанной со стаканом, находится в эффективном гравитационном поле, имеющим напряженность $\vec{g}_* = \vec{g} + \vec{a}$. Очевидно, что поверхность воды тогда будет перпендикулярна вектору $\vec{g}_*$. При этом оставшаяся вода будет иметь в плоскости рисунка треугольную форму, оголяя дно. Отметим, что вода могла бы выливаться, имея форму трапеции, касаясь обеих стенок стакана, только если бы высота стакана не превосходила $2H$. Можно записать следующее соотношение:

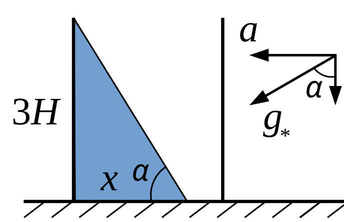


Рис. 6

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{g} = \frac{3H}{x}\,. \tag{30}$$

Заметим, что можно было не переходить в неинерциальную систему отсчета, а рассматривать движение жидкости в исходной (лабораторной) системе. Для этого выделим мысленно небольшой объем воды массой m (см. Рис. 7). В лабораторной системе отсчета на него действует всего две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_\text{А}$. При этом сила Архимеда направлена перпендикулярно поверхности воды. Второй закон Ньютона для выделенного элемента воды в проекции на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид:

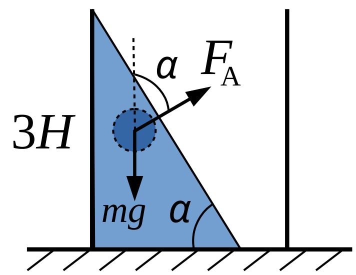


Рис. 7

$$F_\text{А} \sin\alpha = ma\,, \tag{31}$$

$$F_\text{А} \cos\alpha - mg = 0\,. \tag{32}$$

Отсюда мы легко приходим к соотношению (30).

Найдем неизвестный катет x:

$$x = 3H\,\frac{g}{a}\,. \tag{33}$$

Объем воды пропорционален площади соответствующей фигуры на рисунке. Эта площадь равна $(3/2)Hx = (9/2)(g/a)H^2$. В конечный момент времени, когда стакан покоится, вода имеет форму прямоугольника с площадью $3hH$. Приравнивая эти площади, получаем

$$h = \frac{3g}{2a}\,H\,. \tag{34}$$

Равенство высот $h = H$ имеет место при $a = 3g/2$. Очевидно, что это минимальное значение ускорения a, при котором происходит выливание воды из стакана и реализуется ситуация, изображенная на Рис. 6. Таким образом, при $a \leqslant 3g/2$ уровень воды остается прежним ($h = H$), а при $a > 3g/2$ имеем $h = (3/2)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 8.

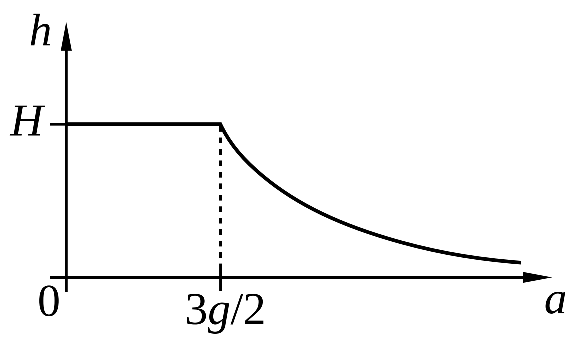


Рис. 8

Ответ: Если $a \leqslant 3g/2$, то $h = H$; если $a > 3g/2$, то $h = (3/2)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 8.

Задача 3.

Обозначим массы поршней в широком и узком сосудах через m_1 и m_2 соответственно. Для удобства введем также $S_1 \equiv 4S$ и $S_2 \equiv S$. Предположим, что в состоянии равновесия большой поршень находится выше маленького на высоту H. Приравнивая давления жидкости на уровне маленького поршня, получаем (p_0 — внешнее давление):

$$p_0 + \frac{m_2 g}{S_2} = p_0 + \frac{m_1 g}{S_1} + \rho g H \qquad \Longleftrightarrow \qquad H = \frac{1}{\rho}\left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1}\right). \tag{35}$$

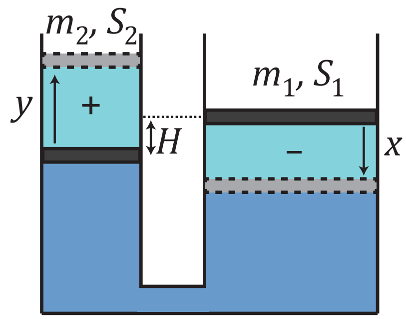


Рис. 9

При надавливании на поршень и его перемещении на расстояние x вниз над системой совершается положительная работа. Эта работа равна изменению потенциальной энергии системы ΔU. Когда поршень отпускают, начинаются колебания, которые постепенно затухают из-за наличия вязкости. Система возвращается в исходное состояние механического равновесия. Поскольку сообщающиеся сосуды теплоизолированы, вся совершенная над системой работа приводит к ее нагреву, то есть

$$\Delta U = C\Delta T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta T = \frac{\Delta U}{C}. \tag{36}$$

Поскольку объем жидкости сохраняется, перемещения большого x и маленького y поршней связаны соотношением

$$S_1 x = S_2 y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{S_1}{S_2}\, x. \tag{37}$$

Рассчитаем изменение потенциальной энергии системы по сравнению с состоянием равновесия. Большой поршень опускается на величину x, что уменьшает энергию на величину $m_1 g x$. Маленький поршень поднимается на y. Соответствующее изменение энергии равно $m_2 g y$. Разберемся с потенциальной энергией жидкости. Все изменение можно представить как перенос жидкости массой $\rho x S_1$ из одного сосуда в другой из области, помеченной на Рис. 9 знаком "$-$", в область, отмеченную знаком "$+$". При этом центр масс перемещаемого объема жидкости поднимается с уровня $-x/2$ относительно большого поршня на уровень $-H + y/2$. Таким образом, полное изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = -m_1 g x + m_2 g y + \rho x S_1 g\left[-H + \frac{y}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{38}$$

С учетом (35) и (36) имеем

$$\Delta T = \frac{\rho g x^2 S_1}{2C}\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) = \frac{10\rho g x^2 S}{C}. \tag{39}$$

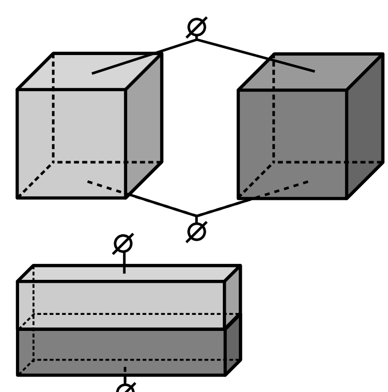
В решении мы предполагали, что в равновесии большой поршень находится выше маленького, однако все выкладки остаются в силе и в обратном случае, если считать H отрицательным.

<u>Ответ</u>: Изменение температуры системы составляет $10\rho g x^2 S/C$.

Задача 4.

Обозначим длину ребра кубика за a, удельные сопротивления материалов, из которых изготовлены кубики, через ρ_1 и ρ_2. Согласно условию линии тока направлены всегда перпендикулярно граням, к которым подключен источник. Поэтому для определения сопротивлений можно пользоваться формулой $R = \rho l/S$, где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения. Сопротивления кубиков равны

$$R_1 = \frac{\rho_1 a}{a^2} = \frac{\rho_1}{a}, \qquad R_2 = \frac{\rho_2 a}{a^2} = \frac{\rho_2}{a}. \tag{40}$$



На верхней части Рис. 10 кубики подключены к источнику параллельно, поэтому полное сопротивление составляет

$$R_{\mathrm{I}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)a}\,. \tag{41}$$

При изменении формы кубиков объем сохраняется. Следовательно, уменьшение длины проводника в λ раз приводит к увеличению площади поперечного сечения в λ раз. В результате сопротивления становятся равными

$$R_1' = \frac{\rho_1 a/\lambda}{\lambda a^2} = \frac{\rho_1}{\lambda^2 a}\,, \qquad R_2' = \frac{\rho_2 a/\lambda}{\lambda a^2} = \frac{\rho_2}{\lambda^2 a}\,. \tag{42}$$

На нижней части Рис. 10 сплющенные кубики подключены последовательно. Полное сопротивление равно

$$R_{\mathrm{II}} = R_1' + R_2' = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda^2 a}\,. \tag{43}$$

По условию в обоих случаях в цепи течет одинаковый ток. Значит, сопротивления R_{I} и R_{II} должны совпадать:

$$R_{\mathrm{I}} = R_{\mathrm{II}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)a} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda^2 a}\,. \tag{44}$$

Сокращая на a и вводя переменную $x \equiv \rho_1/\rho_2$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + \left(2 - \lambda^2\right) x + 1 = 0\,. \tag{45}$$

Решения этого уравнения

$$x_\pm = \frac{\left(\lambda^2 - 2\right) \pm \sqrt{\left(\lambda^2 - 2\right)^2 - 4}}{2}\,. \tag{46}$$

Отметим, что $x_+ x_- = 1$. Таким образом, x_+ дает отношение большего удельного сопротивления к меньшему, а x_- — обратную величину. То есть оба решения квадратного уравнения описывают одну и ту же ситуацию. Решения имеют смысл только при $\lambda \geqslant 2$. В противном случае условие задачи не может быть реализовано. При $\lambda = 2$, естественно, $x_+ = x_- = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$.

Ответ: Отношение большего удельного сопротивления к меньшему равно $[(\lambda^2 - 2) + \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}]/2$. Решение существует только при $\lambda \geqslant 2$.

Задача 5.

См. решение задачи 5 в варианте для 11 класса.