

Городская открытая олимпиада школьников по физике 2022/23 года

Заключительный этап

Городской тур 2022/23. 10 класс

Задача 1.

Ответ на вопрос задачи представлен на Рис. 1. Для удобства мы поместили три изображения человека в зеркалах разными цветами, и такими же цветами поместили траекторию головы изображения. Всего изображений три. Однако, как мы увидим, одно из изображений будет иногда пропадать.

Построение изображения в плоском зеркале хорошо известно: изображение как бы оказывается “за зеркалом” на таком же расстоянии от него, как предмет.

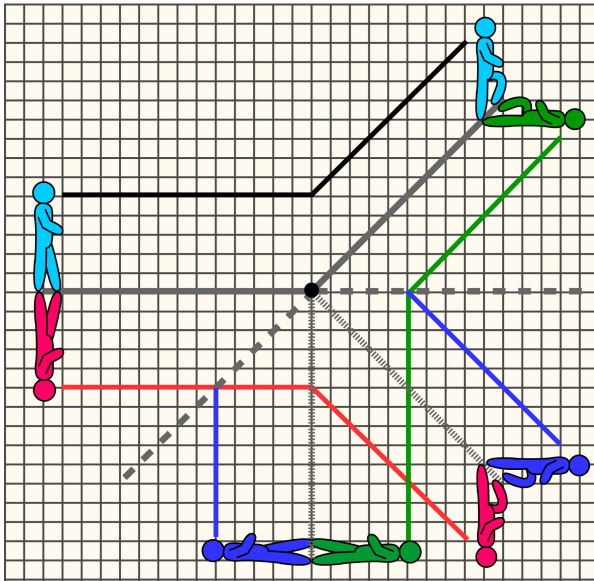


Рис. 1:

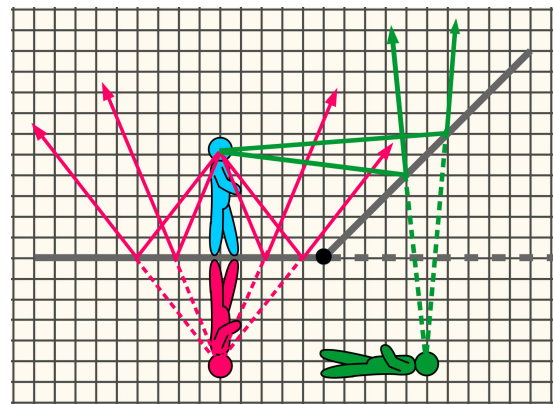


Рис. 2:

Рассмотрим сначала, как формируется первое изображение — которое получается, когда лучи от человека отражаются в плоском горизонтальном зеркале. Это изображение мы поместили красным цветом. Посмотрите на Рис. 2: лучи (от какого-то источника света, попавшие на голову и отразившиеся от нее в произвольную сторону) попадают на зеркало и отражаются по закону “угол падения равен углу отражения”, при этом можно представить, что лучи как будто не отражались, а просто вышли из головы красного перевернутого человека “за зеркалом”. Так и формируется **мнимое изображение в плоском зеркале** — представление о предмете на пересечении продолженных за зеркало лучей.

Аналогично формируется второе изображение, когда лучи отражаются от наклонного зеркала. Это изображение мы поместили зеленым. То, какие лучи его образуют, также представлено на Рис. 2.

Однако, существует и третья возможность, когда луч попадает сначала на одно зеркало, а потом на второе. Посмотрите на Рис. 3. Отразившись от горизонтального зеркала луч идет так же, как если бы зеркала не было, а вместо этого он был бы испущен головой красного человека. Далее он попадает на наклонное зеркало и снова отражается — как если бы красный человек отразился в наклонном зеркале. Так образуется третье изображение, которое мы поместили синим. При построении этого изображения удобно мысленно продлить наклонное зеркало (пунктирная серая линия), представив себе, что красный человек в него “смотрится” и видит свое отражение — синего человека.

Из этого рисунка также понятно, что пока человек идет по горизонтальной поверхности, луч, попавший на горизонтальное зеркало в дальнейшем, в принципе, может попасть на наклонное зеркало (а может и не попасть). А вот наоборот быть не может: если первое падение луча было на наклонное зеркало, попасть обратно на горизонтальное он уже не сможет.

Когда же человек идет по наклонному зеркалу, все наоборот: лучи попавшие на наклонное зеркало могут попасть на горизонтальное, а вот наоборот никак. Соответствующее построение см. на Рис. 4; там же представлены лучи, которые формируют три разных изображения человека, когда он идет по наклонной плоскости.

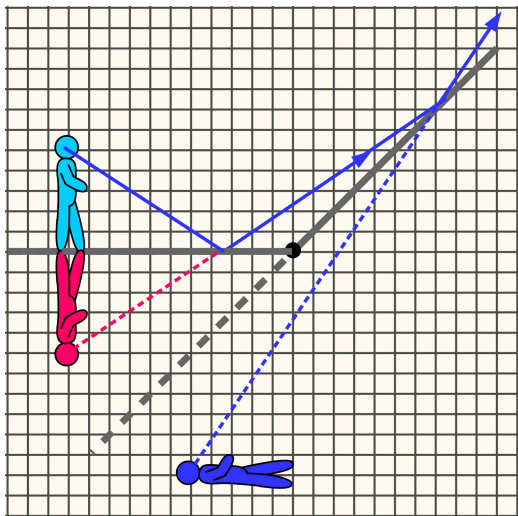


Рис. 3:

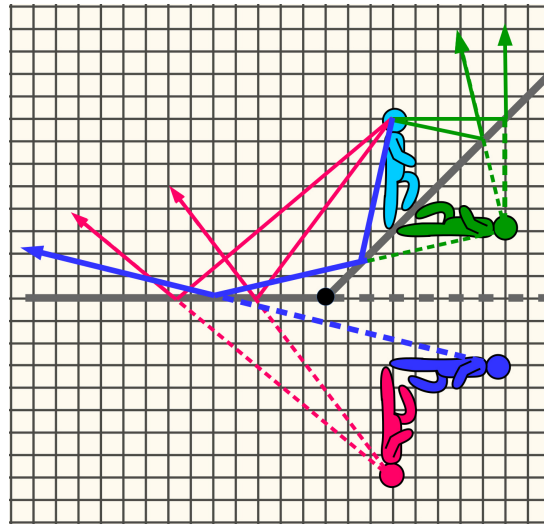


Рис. 4:

Третье изображение (помеченное синим) может пропасть, если ни один луч, вышедший от головы человека не может последовательно попасть на оба зеркала. Это действительно так, если человек идет по горизонтальной поверхности и находится от угла в пяти клетках и ближе. Действительно, при этом лучи, отраженные от горизонтальной поверхности “идут слишком круто вверх”: на Рис. 2 человек расположен в пяти клетках от угла, и даже самый пологий отраженный красный луч не попадает на наклонное зеркало. Поэтому в этот период движения одно из трех изображений пропадает — его нельзя увидеть ниоткуда.

Зато когда человек преодолет угол, луч, упавший на наклонное зеркало всегда может попасть на горизонтальное. Предлагаем читателям убедиться в этом самим.

Теперь понятен принцип построения цветных линий-траекторий на Рис. 1. Требуется отразить траекторию головы (черную линию) относительно горизонтального зеркала — получится первая траектория ответа, красная. Отразив исходную траекторию относительно наклонного зеркала, получим второй ответ для траектории, зеленую линию. Наконец, нужно взять траекторию головы, когда человек шел горизонтально, убрать оттуда 5 клеток около угла и отразить ее дважды — сначала от горизонтального зеркала, затем от наклонного. Получим синюю вертикальную линию. Далее, нужно взять наклонный участок исходной траектории и тоже отразить его дважды: один раз от наклонного зеркала, а второй раз — от горизонтального.

Ответ: Изображений три, но одно иногда пропадает. Ответ представлен цветными линиями на Рис 1.

Задача 2.

См. решение задачи №2 в варианте 9 класса.

Задача 3.

Пусть центр масс горки расположен на расстоянии x по горизонтали от точки O (см. Рис. 5). Из условия нам не известна величина x ; можно сказать только, что центр масс горки расположен левее точки O (иначе горка опрокинулась бы и без закатывания грузиков).

Когда суммарный момент сил, действующих на горку, равняется нулю, точка A начинает отрываться от стола. При этом горка стоит на ребре, проходящем через точку O , и сила реакции опоры приложена к нему. Рассматривая моменты сил относительно этого ребра, получим

$$Mgx = P_i d_i, \quad (1)$$

где P_i — сила, с которой грузик массой m_i ($i = 1, 2, 3$) действует на горку, d_i — ее плечо. Поскольку трение отсутствует, эта сила равна

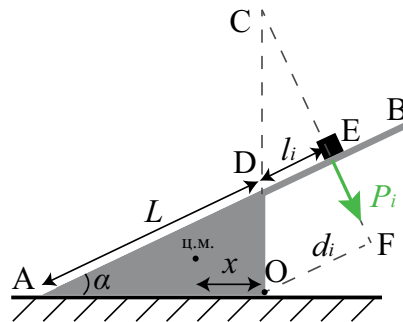


Рис. 5:

$P_i = m_i g \cos \alpha$ и направлена перпендикулярно поверхности горки.
Из подобия прямоугольных треугольников CDE и COF находим

$$\frac{d_i}{l_i} = \frac{L \sin \alpha + l_i / \sin \alpha}{l_i / \sin \alpha} \Rightarrow d_i = L \sin^2 \alpha + l_i, \quad (2)$$

где величины L , l_i , α введены, как показано на рисунке 5. Подставляя (2) в (1), получаем

$$Mgx = m_i g \cos \alpha (L \sin^2 \alpha + l_i). \quad (3)$$

Поскольку указанные в условии энергии E_i являются минимальными для отрыва точки А, отрыв происходит в момент, когда грузик останавливается в высшей точке своей траектории. При этом вся начальная кинетическая энергия грузика переходит в потенциальную (т.к. трение отсутствует): $E_i = m_i g h_i$, где $h_i = (L + l_i) \sin \alpha$ — максимальная высота грузика. Подставляя сюда расстояние l_i , выраженное из (3), получим

$$E_i = m_i g L \sin \alpha \cos^2 \alpha + Mgx \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

В этом равенстве удобно “спрятать” в константы $a \equiv gL \sin \alpha \cos^2 \alpha$ и $b \equiv Mgx \operatorname{tg} \alpha$ параметры горки (все, что не содержит индекс i и не зависит от грузиков):

$$E_i = am_i + b.$$

Эти константы можно найти из двух данных в условии пар значений E_1, m_1 и E_2, m_2 :

$$\begin{cases} E_1 = am_1 + b \\ E_2 = am_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (E_2 - E_1)/(m_2 - m_1) \\ b = (E_1 m_2 - E_2 m_1)/(m_2 - m_1) \end{cases}.$$

Зная a и b , найдем искомую энергию: $E_3 = am_3 + b = (E_2 m_2 - E_1 m_1)/(m_2 - m_1)$.

Ответ: $E_3 = (E_2 m_2 - E_1 m_1)/(m_2 - m_1)$.

Задача 4.

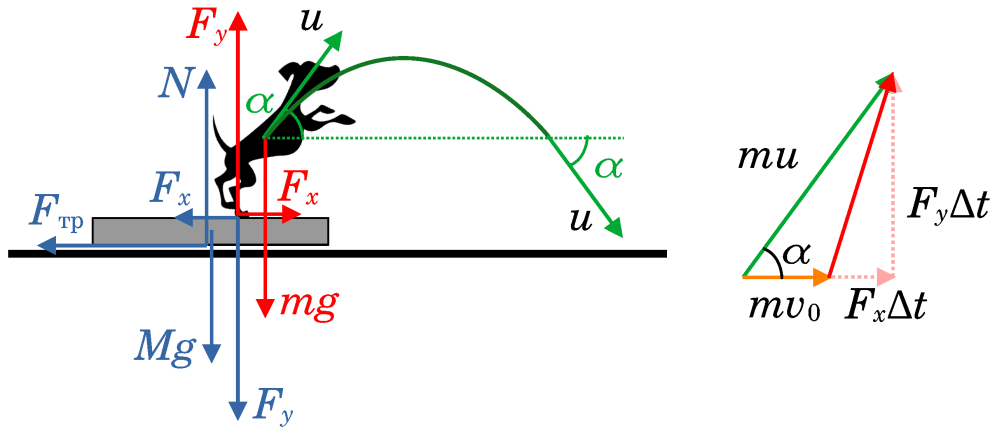


Рис. 6:

Прежде чем переходить к решению задачи, кратко обсудим второй закон Ньютона в импульсной форме. Предположим, что на некоторое тело действует сила \vec{F} . Произведение силы \vec{F} на время ее действия τ называется импульсом силы. Как известно, действие силы вызывает ускорение тела и, следовательно, изменяет его скорость. Изменение импульса тела можно представить как результат действия импульса силы:

$$\vec{p}(\tau) - \vec{p}(0) = \vec{F}\tau. \quad (5)$$

Если сила не постоянна во времени, то время ее действия τ можно разбить на большое количество малых отрезков времени Δt_i , для каждого из которых изменением силы можно пренебречь. При этом полное изменение импульса тела дается суммой импульсов сил на каждом из отрезков

$$\vec{p}(\tau) - \vec{p}(0) = \sum_i \vec{F}(t_i) \Delta t_i. \quad (6)$$

Рассмотрим изменение импульса собаки в результате прыжка. Относительно неподвижной системы отсчета импульс собаки до прыжка был направлен горизонтально и равнялся mv_0 (см. Рис. 6). По условию, в момент приземления скорость собаки относительно земли была направлена вниз под углом α к горизонту и составляла по величине u . Следовательно, сразу после прыжка импульс собаки был направлен вверх под углом α к горизонту и равнялся mu . Во время прыжка на собаку действовали сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны саней \vec{F} . Эти силы схематично отмечены на Рис. 6 красным цветом, для удобства вектор \vec{F} разложен на вертикальную и горизонтальную составляющие (F_x и F_y обозначают абсолютные величины проекций). Вообще говоря, сила реакции зависит от времени, т.е. $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Сначала эта сила увеличивается по абсолютной величине, затем уменьшается, кроме того она, в принципе, может изменять свое направление. Обозначим время прыжка через Δt . По условию, Δt пренебрежимо мало. В связи с этим, физически осмысленным является предположение, что во время прыжка линия действия силы \vec{F} не изменяется: усилия собаки по выталкиванию направлены в определенную сторону. Таким образом, отношение F_x/F_y остается постоянным. Зависимость от времени модуля силы \vec{F} можно учесть, используя уравнение (6). Однако эта зависимость не влияет на результаты, поэтому для упрощения вычислений мы примем, что на протяжении интервала времени Δt сила реакции \vec{F} остается постоянной. Выпишем для собаки второй закон Ньютона в импульсной форме:

$$(m\vec{g} + \vec{F}) \Delta t = \Delta \vec{p}. \quad (7)$$

Обратим внимание, что для того, чтобы за малое время Δt сила, действующая на тело, могла изменить величину его импульса, она должна быть очень большой. В уравнении (7) сила тяжести конечна, поэтому для бесконечно малого интервала времени Δt без потери точности вкладом импульса силы тяжести можно пренебречь по сравнению с вкладом импульса бесконечно большой силы реакции. Таким образом, в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси получаем

$$F_x \Delta t = m(u \cos \alpha - v_0), \quad (8)$$

$$F_y \Delta t = mu \sin \alpha. \quad (9)$$

Силы, действующие на сани в момент прыжка, показаны на левой части Рис. 6 синим цветом. По третьему закону Ньютона сила, действующая на сани со стороны собаки, равна по величине и противоположна по направлению силе \vec{F} . Эта сила также разложена на две составляющие. Импульс саней по вертикали не изменяется, поэтому сила реакции со стороны земли на сани равна

$$N = Mg + F_y. \quad (10)$$

Для скользящих саней сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. При этом суммарная сила, действующая на сани по горизонтали, направлена против их движения и равна $F_{\text{тр}} + F_x$. Используя уравнение аналогичное (7), находим изменение горизонтального импульса саней в ходе прыжка

$$\Delta P_x = -(F_{\text{тр}} + F_x) \Delta t = -(\mu Mg + \mu F_y + F_x) \Delta t. \quad (11)$$

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано для уравнения (7), приходим к выводу, что конечным по величине слагаемым μMg в скобках в (11) можно пренебречь по сравнению с бесконечно большими вторым и третьим слагаемыми. Используя уравнения (8) и (9), получаем, что сразу после прыжка скорость саней будет равна

$$v = v_0 + \frac{\Delta P_x}{M} = v_0 - \frac{m}{M} (\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0). \quad (12)$$

Обратим внимание, что при $\mu = 0$ получается выражение, которое можно было бы сразу получить, применив в этом случае закон сохранения горизонтальной проекции полного импульса для системы “сани+собака”. При

$\mu > 0$ закон сохранения импульса для этой системы не выполняется, так как в ходе прыжка на систему действует бесконечная горизонтальная внешняя сила со стороны земли. Заметим также, что выражение (12) может оказаться отрицательным. Будем пока считать, что это не так, то есть выполняется условие

$$v_0 - \frac{m}{M} (\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0) > 0 \quad (13)$$

Противоположный случай рассмотрен ниже.

После прыжка в выражении (10) пропадает вклад силы \vec{F} , поэтому $N = Mg$ и $F_{\text{тр}} = \mu Mg$. Таким образом, сани замедляются с ускорением μg . Следовательно, до полной остановки сани пройдут расстояние

$$S = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(v_0 - m(\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0)/M)^2}{2\mu g}. \quad (14)$$

Дальность прыжка собаки равна

$$L = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (15)$$

Если $S \geq L$, то сани доедут до сидящей на снегу собаки. В противном случае, они остановятся на расстоянии $L - S$ от нее.

Отметим, что при выполнении условия (13) на самом деле нет необходимости рассматривать горизонтальную проекцию силы реакции \vec{F} . Скорость саней после прыжка собаки можно найти, рассмотрев изменение горизонтальной проекции полного импульса для системы “сани+собака” под действием импульса силы трения $-\mu F_y \Delta t$. Действительно, до прыжка горизонтальный импульс равен $(m + M)v_0$, после прыжка он равен $Mv + mu \cos \alpha$. Сбрав все формулы вместе, сразу же получаем выражение (12). Более подробное рассмотрение было выполнено с прицелом на случай, когда в ходе прыжка скорость саней обращается в нуль.

Ответ: Если выполняется условие (13), то сани продолжают ехать в ту же сторону, в которую прыгнула собака, при этом расстояние между ними $L - S$, где S и L заданы уравнениями (14) и (15) соответственно, при $S \geq L$ сани доедут до собаки.

Вернемся к обсуждению случая, когда в уравнении (12) получается отрицательная скорость: $v < 0$. Отметим, что *данный анализ предполагает получение участником дополнительных бонусных баллов*. Решение без этого анализа оценивается, исходя из полного балла.

В первую очередь заметим, что для $\mu = 0$ отрицательное значение скорости v в уравнении (12) означает, что после прыжка собаки сани начали двигаться в противоположную сторону. Путь саней до остановки по-прежнему определяется формулой (14), однако итоговое расстояние между собакой и санями равняется $L + S$.

Если условие (13) не выполняется, при наличии трения ($\mu > 0$) выражение (12) для скорости саней после прыжка перестает быть верным. Причина в том, сила трения всегда направлена против движения саней. Если в процессе отталкивания собаки от саней их скорость обращается в нуль, то сила трения изменяет направление и начинает мешать разгону саней. Суммарная горизонтальная сила, действующая в этой ситуации на сани, становится равной $F_{\text{тр}} - F_x$. Если сила F_x не превосходит по величине максимально возможную силу трения покоя $\mu N \approx \mu F_y$, где в выражении (10) для N мы пренебрегли вкладом силы тяжести по сравнению с вкладом силы реакции F_y , то после обращения скорости саней в нуль они останутся в покое, и собака завершит свой прыжок, отталкиваясь от неподвижных саней. Естественно, что итоговое расстояние между собакой и санями оказывается в этом случае равным L . Данный сценарий реализуется при условии

$$F_x \leq \mu F_y \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq \frac{u \cos \alpha - v_0}{u \sin \alpha}. \quad (16)$$

Здесь и далее важную роль играет предположение о постоянстве отношения F_x/F_y , предположение о постоянстве модуля $|\vec{F}|$ необязательно.

В случае, если условие (16) не выполняется, сани после остановки начнут разгоняться под действием силы $\mu F_y - F_x$ в противоположном направлении. Найдем скорость саней после прыжка. Для начала определим, какая доля $0 < \lambda < 1$ от времени прыжка Δt потребуется, чтобы скорость саней обратилась в нуль. Иначе говоря, какая часть импульса силы реакции \vec{F} будет потрачена на прыжок собаки к тому моменту, когда сани остановятся. Используя уравнение (11), получаем

$$0 - Mv_0 = -(\mu F_y + F_x)\lambda \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{Mv_0}{m(\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0)} \quad (17)$$

Оставшаяся доля $1 - \lambda$ от Δt (от импульса силы реакции \vec{F}) соответствует разгону саней в противоположном направлении. Для конечной скорости саней v' имеем

$$Mv' - 0 = -(F_x - \mu F_y)(1 - \lambda)\Delta t \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{\mu u \sin \alpha - u \cos \alpha + v_0}{\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0} \left(v_0 - \frac{m}{M} (\mu u \sin \alpha + u \cos \alpha - v_0) \right). \quad (18)$$

В этом случае путь саней до окончательной остановки равен

$$S' = \frac{v'^2}{2\mu g}, \quad (19)$$

и итоговое расстояние между собакой и санями оказывается равным $L + S'$.

Ответ*: Если не выполняется условие (13), то возможны два варианта: 1) если выполнено также условие (16), то сани остановятся в месте прыжка и искомое расстояние будет равно L ; 2) в противном случае сани преодолеют в противоположном направлении путь S' , заданный уравнениями (19) и (18), и итоговое расстояние равно $L + S'$.

Задача 5.

При решении задачи будем использовать тот факт, что сопротивление участка проволоки пропорционально длине этого участка. В первую очередь заметим, что поскольку по условию сопротивление одного большого квадрата между точками А и В равно R , то сопротивление *ребра* большого квадрата также равно R .

Перейдем к рассмотрению схемы, содержащей большое количество квадратов. Обозначим искомое сопротивление символом R_* . Заметим, что если к схеме, которую спаяла Люба, добавить два больших квадрата с внешней стороны, то схема будет подобна исходной. Воспользуемся этим наблюдением для нахождения R_* .

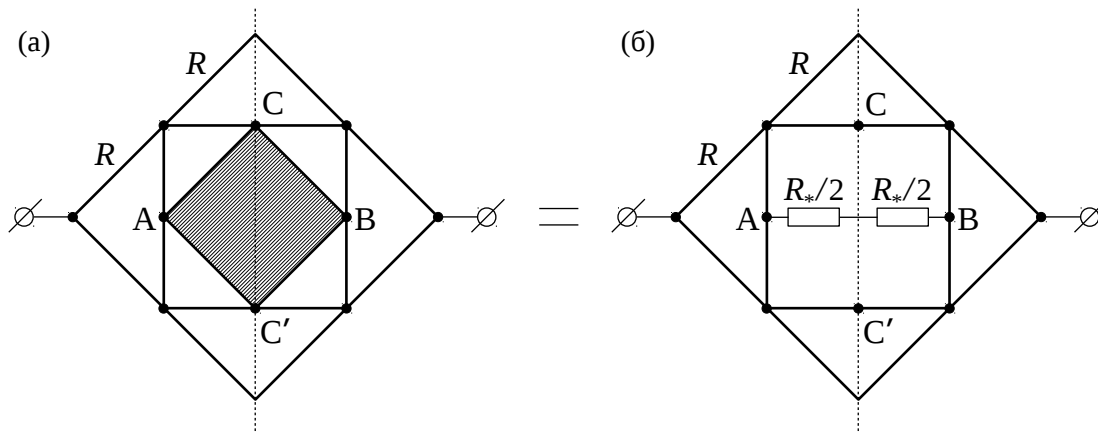


Рис. 7:

На Рис. 7 (а) показана схема, которая получается добавлением двух квадратов к схеме Любы, изображенной в виде заштрихованного квадрата $ACBC'$. Поскольку схема на Рис. 7 (а) в два раза больше исходной, ее сопротивление равно $2R_*$. Из соображений симметрии ясно, что точки, находящиеся на оси CC' , являются эквипотенциальными, что позволяет “расцепить” проволоку в узлах C и C' с сохранением симметрии схемы, т. е. отсоединить горизонтальные участки проволоки от вершин C и C' заштрихованного квадрата. Теперь заштрихованный квадрат, содержащий большое число сопротивлений, можно заменить на резистор R_* , подключенный между точками A и B , но мы представим его в виде двух резисторов $R_*/2$, подключенных последовательно, как показано на Рис. 7 (б). Вычислим сопротивление этой схемы. Так как все точки на оси CC' эквипотенциальны, мы можем объединить их в один узел, разбив тем самым схему на две одинаковые схемы, подключенные последовательно, что позволяет рассмотреть лишь одну половину, умножив все сопротивления в ней на 2. Таким образом, требуется вычислить сопротивление схемы на Рис. 8, где все резисторы изображены явно. Точки D и D' имеют одинаковые потенциалы, так что их можно объединить в один узел. Кроме того, схема содержит четыре пары резисторов, подключенных параллельно, что позволяет заменить их на эквивалентные сопротивления вдвое меньшей величины. Упрощенная

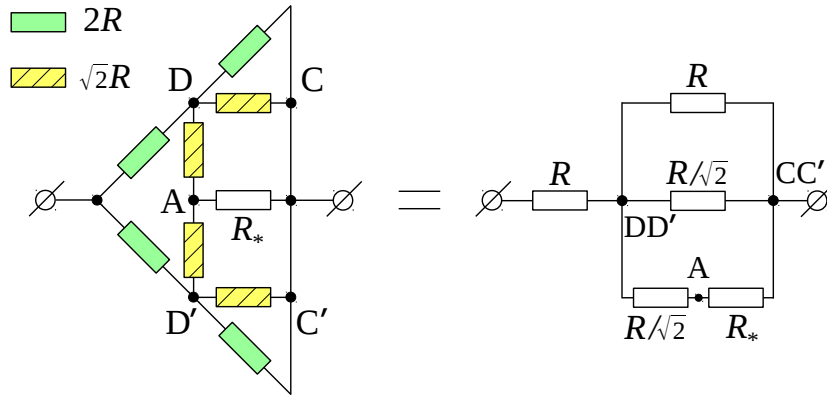


Рис. 8:

схема, изображенная на рисунке справа, имеет следующее сопротивление:

$$R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R/\sqrt{2}} + \frac{1}{R/\sqrt{2} + R_*} \right)^{-1} = R + \frac{R(R + \sqrt{2}R_*)}{(1 + 2\sqrt{2})R + (1 + \sqrt{2})\sqrt{2}R_*}. \quad (20)$$

С другой стороны, как было сказано выше, данное сопротивление равно $2R_*$, что позволяет записать уравнение

$$2R_* = R + \frac{R(R + \sqrt{2}R_*)}{(1 + 2\sqrt{2})R + (1 + \sqrt{2})\sqrt{2}R_*}, \quad (21)$$

откуда мы получаем квадратное уравнение относительно R_* :

$$2(\sqrt{2} + 1)R_*^2 + \sqrt{2}RR_* - (\sqrt{2} + 1)R = 0. \quad (22)$$

Существует один положительный корень:

$$R_* = \frac{\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} R = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1) - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} R = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} R \approx 0.66R. \quad (23)$$

Ответ: Люба измерит сопротивление $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})R/2 \approx 0.66R$.