Городская открытая олимпиада школьников по физике 2022/23 года

Заключительный этап

Экспериментальный тур

Задача 11.1. Период колебаний треугольника

Известно, что период колебаний прямоугольного треугольника определяется выражением $T=\sqrt{\alpha c^2/l+\beta l}$, где α и β – константы, c – его гипотенуза, l – расстояние от оси вращения до центра масс. Определите периоды колебаний прямоугольного треугольника относительно осей, перпендикулярных его плоскости и проходящих вблизи вершин треугольника. Определите на основе эксперимента и теоретически коэффициенты α и β.

Оборудование: прямоугольный треугольник из картона, булавка, секундомер, линейка.

Решение

$$T_a=\sqrt{\frac{\alpha c^2}{l_a}+\beta l_a},\ T_b=\sqrt{\frac{\alpha c^2}{l_b}+\beta l_b},\ T_c=\sqrt{\frac{\alpha c^2}{l_c}+\beta l_c}$$

$$T_a^2 l_a=\alpha c^2+\beta l_a^2,\ \ T_b^2 l_b=\alpha c^2+\beta l_b^2,\ \ T_c^2 l_c=\alpha c^2+\beta l_c^2$$

$$T_a^2 l_a=\alpha c^2+\beta l_a^2,\ \ T_b^2 l_b=\alpha c^2+\beta l_b^2,\ \ T_c^2 l_c=\alpha c^2+\beta l_c^2$$

$$\alpha c^2=T_a^2 l_a-\beta l_a^2=T_b^2 l_b-\beta l_b^2=T_c^2 l_c-\beta l_c^2$$

$$\beta_{ab}=\frac{T_a^2 l_a-T_b^2 l_b}{l_a^2-l_b^2},\quad \beta_{bc}=\frac{T_c^2 l_c-T_b^2 l_b}{l_c^2-l_b^2},\quad \beta_{ac}=\frac{T_a^2 l_a-T_c^2 l_c}{l_a^2-l_c^2} \tag{1}$$

$$\beta=\frac{\beta_{ab}+\beta_{bc}+\beta_{ac}}{3} \tag{2}$$

$$\alpha=\frac{T_a^2 l_a-\beta l_a^2}{c^2}=\frac{T_b^2 l_b-\beta l_b^2}{c^2}=\frac{T_c^2 l_c-\beta l_c^2}{c^2} \tag{3}$$

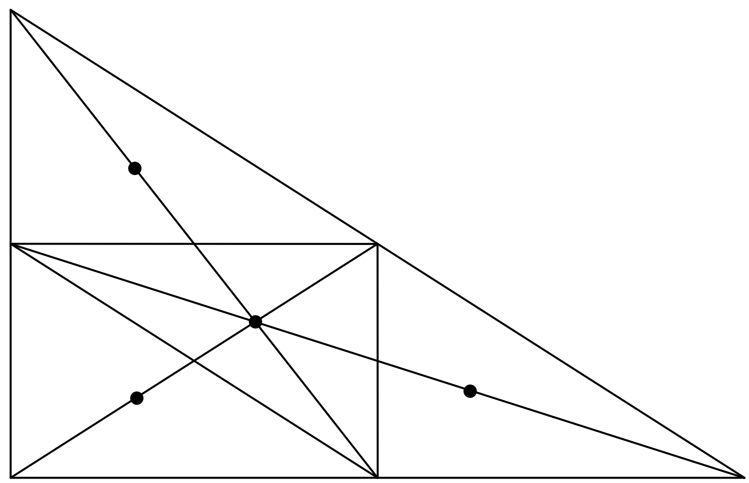
$$\alpha=\frac{\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c}{3} \tag{4}$$

Теоретическое выражение для коэффициентов:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{km\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ml^2}{mgl}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + l^2}{gl}}$$

Момент инерции треугольника относительно центра масс найдем методом подобия. Разобьем треугольник на 4 подобных ему треугольника.



$$I_C = kml^2$$

$$I_C = k\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(k\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2\right) + \left(k\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{1}{3}m_b\right)^2\right) +$$
$$+\left(k\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{1}{3}m_c\right)^2\right)$$

$$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{4\cdot 9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

$$3kml^2 = \frac{m}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}$$

$$3kml^2 = \frac{m}{9\cdot 4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2\right)$$

$$kl^2 = \frac{1}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{c^2}{18}.$$

$$k = \frac{1}{36}, \quad \alpha = \frac{8\pi^2}{g}k = 0.224. \tag{8}$$

$$\beta = \frac{4\pi^2}{g} = 4.03. \tag{9}$$

Критерии оценивания 11.1

1. Указано, что центр масс треугольника в точке пересечения медиан	0.5
2. Определены расстояния до центра масс от вершин	0.5
3. Измерены длины сторон	0.5
4. Измерены периоды колебаний у каждого из углов	1.5
5. Формула (1) + Значение по 0.5 балла за каждую вершину	1+1.5
6. Значение по формуле (2)	1
7. Формула (3), по 0.5 балла за каждую вершину	1+1.5
8. Значение по формуле (4)	1
9. Формула (8)	4
10. Формула (9)	1

Задача 11.2. Кабошоны

Гауссовой кривизной поверхности называется величина:

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{R_1R_2},$$

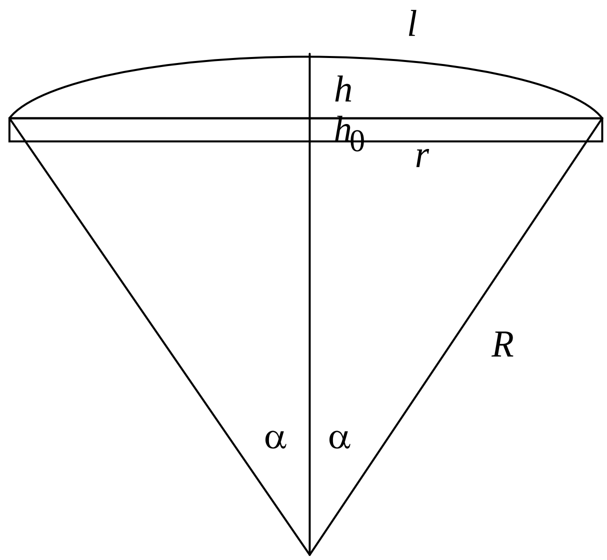
где κ_1 и κ_2 – нормальные кривизны в главных направлениях, R_1 и R_2 – экстремальные значения радиусов кривизны нормальных сечений.

1. Определите гауссову кривизну поверхности вблизи центра овального кабошона.

2. Определите показатель преломления материала кабошона.

Оборудование: овальный кабошон, фонарик, линейка, штангенциркуль по требованию.

Решение



1. Нахождение кривизны. Радиус кривизны найдем, измерив длину дуги l методом прокатывания и диаметр $d = 2R$ кабошона штангенциркулем вдоль одного из двух взаимно перпендикулярных направлений:

$$l = R\alpha, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}.$$

Тогда

$$\sin\frac{l}{2R} = \frac{d}{2R}.$$

$$\sin\left(\kappa\frac{l}{2}\right) = \kappa\frac{d}{2} \qquad (1)$$

Полученное нелинейное уравнение может быть решено, например, методом итераций:

$$\kappa = \frac{2}{d}\sin\left(\kappa\frac{l}{2}\right).$$

Альтернативное нахождение кривизны:

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2, \ \ 2Rh = h^2 + r^2,$$

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h} \qquad (2)$$

Для нахождения h нужно из толщины кабошона H вычесть толщину неискривленной части h_0:

$$h = H - h_0.$$

2. Фокусное расстояние тонкой линзы определяется как

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right),$$

где R_1 и R_0 – радиусы кривизны сторон линзы. Поскольку кабошон плоско-выпуклый, $R_0 \to \infty$:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\frac{1}{R_1},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Тогда

$$n = R_1\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right) + 1$$

Критерии оценивания 11.2

1. Выведена формула для R или κ: на основе (1) на основе (2)	3 2
2. Определены R_1 и/или κ_1	1
3. Определены R_2 и/или κ_2	1
4. Определена гауссова кривизна K	1
5. Оценена погрешность K	1
6. Выведена формула для F	1
7. Определено F_1, соответствующее радиусу R_1	1
8. Определено F_2, соответствующее радиусу R_2	1
9. Выведена формула для n	1
10. Найдено n_1 по R_1	1
11. Найдено n_2 по R_2	1
12. Найдено $n = (n_1 + n_2)/2$	1
13. Оценена погрешность n	1