Городская открытая олимпиада школьников по физике 2022/23 года

Заключительный этап

Городской тур 2022/23. 11 класс

Задача 1. Обозначим жёсткость жгутика K, расстояние между бусинками в равновесии x, заряды бусинок q_1 и q_2.

Условие механического равновесия имеет вид

$$\frac{kq_1q_2}{x^2} = Kx.$$

Домножим его на x

$$\frac{kq_1q_2}{x} = Kx^2$$

и заметим, что слева образовалась потенциальная энергия электрического поля в равновесии, а справа – удвоенная потенциальная энергия жгутика. То есть в равновесии $E_{\text{кулона}} = 2E_{\text{жгутика}}$.

При перерезании жгутика электрические силы начнут разгонять бусинки друг от друга, и кулоновская энергия перейдёт в кинетическую энергию бусинок. А вот энергия жгутика перейдёт в тепло. Поэтому, если выделилось количество тепла Q, то именно столько энергии было запасено в жгутике, $Q = E_{\text{жгутика}}$. А в кинетическую энергию бусинок, когда они сильно удалятся и перестанут взаимодействовать электрически, перейдет кулоновская энергия $2Q$.

Введём импульс $p = m_1V_1 = m_2V_2$ – импульс каждой из бусинок в конце, когда бусинки удалились друг от друга далеко и стали двигаться равномерно. Величина это одна и та же для обеих бусинок, потому что по закону сохранения импульса суммарный импульс системы в конце должен быть равен тому же, чему был равен суммарный импульс системы до перерезания жгутика, то есть остаться нулевым. Значит импульсы бусинок в конце равны друг другу и противонаправлены.

Энергия первой бусинки $E_1 = mV_1^2/2 = p^2/2m_1$, такое же выражение верно для второй бусинки, поэтому

$$2Q = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{4Qm_1m_2}{m_1+m_2}}.$$

Отсюда немедленно получаем ответ $V_1 = p/m_1$ и $V_2 = p/m_2$.

Ответ:

$$V_1 = \sqrt{\frac{4Qm_2}{m_1(m_1+m_2)}}, \qquad V_2 = \sqrt{\frac{4Qm_1}{m_2(m_1+m_2)}}.$$

Задача 2. Обозначим время t, абсолютную температуру в сосуде $T = T(t)$, объём газа под поршнем $V = V(t)$, давление $p = p(t)$.

Раз величина f равномерно растёт во времени, значит производная этой величины постоянна:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\ln(T/T_0)}{dt} = \alpha.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{dT}{Tdt} = \alpha, \tag{1}$$

продифференцировав логарифм. Таков закон изменения температуры по условию задачи.

С другой стороны, по условию $\ln(T/T_0) = \alpha t$, так как при $t = 0$ величина $\ln(T/T_0)$ была равна нулю. Поэтому закон изменения температуры во времени нам известен:

$$T = T_0e^{\alpha t}. \tag{2}$$

Запишем теперь первое начало термодинамики $\delta Q = dU + pdV$ и учтём, что $\delta Q = Wdt$, $dU = C_vdT$, $C_v = 3\nu R/2$, $p = \nu RT/V$. Тогда

$$Wdt = C_vdT + \frac{\nu RT}{V}dV.$$

Разделим его почленно на Tdt, чтобы получить в первом слагаемом справа величину из (1):

$$\frac{W}{T} = \frac{C_v dT}{T dt} + \frac{\nu R dV}{V dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{W}{T} = C_v \alpha + \frac{\nu R dV}{V dt}.$$

Заметим, что по аналогии с (1) в последнем слагаемом собралась величина dV/Vdt, то есть производная величины g, так как аналогично (1) $dg/dt = dV/Vdt$. Поэтому

$$\frac{W}{T} = C_v \alpha + \nu R \frac{dg}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dg}{dt} = \frac{W}{\nu R T} - \frac{C_v \alpha}{\nu R}.$$

Подставим сюда закон (2) и значение C_v:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{W e^{-\alpha t}}{\nu R T_0} - \frac{C_v \alpha}{\nu R} = \frac{W e^{-\alpha t}}{\nu R T_0} - \frac{3\alpha}{2}.$$

Зная, что производная экспоненты является экспонентой, а производная линейной функции – константа, несложно подобрать $g(t)$, производная которой равна последнему выражению:

$$g(t) = \mathrm{Const} - \frac{W}{\nu R T_0 \alpha} e^{-\alpha t} - \frac{3}{2} \alpha t$$

Константа в этом выражении может быть произвольной, она определяется из соображения, чтобы $g(t = 0)$ обращалась в ноль, как и требуется по условию:

$$g(t) = \frac{W}{\nu R T_0 \alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{3}{2} \alpha t. \tag{3}$$

Ответ: см. ф-лу (3).

Задача 3. Найдём по закону сохранения импульса скорости тележки и вагона сразу после срабатывания аварийного механизма.

Для этого, например, удобно перейти в систему отсчёта, где перед расцепкой система «вагон и тележка» покоились. Обозначим скорость вагона сразу после расцепки $u_{\text{в}}$ (она сонаправлена с вектором V), а скорость тележки $u_{\text{т}}$ (противонаправлена V). Используем ЗСИ:

$$M u_{\text{в}} = m u_{\text{т}} \qquad \Rightarrow \qquad u_{\text{т}} = \frac{M}{m} u_{\text{в}} = 5 u_{\text{в}}.$$

Относительная скорость тележки и вагона после расцепки равна $u = u_{\text{в}} + u_{\text{т}} = 6 u_{\text{в}}$. Таким образом

$$u_{\text{в}} = u/6, \quad u_{\text{т}} = 5u/6.$$

Теперь вернёмся в систему отсчёта, связанную с землёй. Вспомним, что расцепка произошла в момент, когда система двигалась со скоростью V. Следовательно, сразу после расцепки скорость вагона $V_{\text{в}} = V + u/6$, скорость тележки $V_{\text{т}} = V - 5u/6$.

Отметим, что если вагон после расцепки, очевидно, продолжает движение в ту же сторону, тележка может двигаться в любую сторону в зависимости от знака разности $V - 5u/6$. Впрочем, так как нас интересует случай, когда тележка потом столкнётся с вагоном, надо ограничиться случаем, когда эта величина положительна. Ведь если после расцепки вагон и тележка едут в разные стороны, они точно не столкнутся! Поэтому первое условие, которое необходимо (но недостаточно!) для столкновения :

$$V - 5u/6 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad V > 5u/6. \tag{4}$$

Столкновение может произойти в двух ситуациях. Случай А: тележка с вагоном столкнуться до того, как оба остановятся. Случай Б: вагон успеет остановиться и тележка врежется в него сзади.

Рассмотрим сначала случай Б. Разумно посмотреть, сколько каждый объект проедет до остановки. Тормозной путь вагона можно найти, например, по закону сохранения энергии. Вся кинетическая энергия вагона перешла в конце в работу силы трения:

$$\frac{M V_{\text{в}}^2}{2} = \mu_1 M g S_{\text{в}} \qquad \Rightarrow \qquad S_{\text{в}} = \frac{V_{\text{в}}^2}{2\mu_1 g} = \frac{(V + u/6)^2}{2\mu_1 g}. \tag{5}$$

Этот же результат можно получить, рассматривая равнозамедленное движение вагона с ускорением $\mu_1 g$, однако, это более громоздко.

Аналогично находим тормозной путь $S_т$ для тележки (мы ищем его, считая, что тележка как бы «проходит вагон насквозь»):

$$\frac{mV_т^2}{2} = \mu_2 mgS_т \qquad \Rightarrow \qquad S_т = \frac{V_т^2}{2\mu_2 g} = \frac{(V-5u/6)^2}{2\mu_2 g}.$$

Если $S_т \geq S_в$ столкновение неминуемо:

$$\frac{(V-5u/6)^2}{2\mu_2 g} \geq \frac{(V+u/6)^2}{2\mu_1 g}.$$

Это квадратное неравенство, которое несложно разрешить относительно V. Для этого запишем его в виде

$$\mu_1\left(V^2 - \frac{10uV}{6} + \frac{25u^2}{36}\right) \geq \mu_2\left(V^2 + \frac{2uV}{6} + \frac{u^2}{36}\right)$$

и сгруппируем квадратный трёхчлен

$$(\mu_1-\mu_2)V^2 - \frac{2uV(5\mu_1+\mu_2)}{6} + \frac{u^2(25\mu_1-\mu_2)}{36} \geq 0. \tag{6}$$

Найдём, что квадратный трёхчлен в левой части (6) обращается в ноль при $V = V_{1,2}$, где

$$V_1 = \frac{u\left(5\mu_1+\mu_2-6\sqrt{\mu_1\mu_2}\right)}{6(\mu_1-\mu_2)} \qquad V_2 = \frac{u\left(5\mu_1+\mu_2+6\sqrt{\mu_1\mu_2}\right)}{6(\mu_1-\mu_2)}. \tag{7}$$

Так как в выражении (6) квадратный трёхчлен соответствует параболе с «рогами», направленными вверх (ведь коэффициент $\mu_1-\mu_2$ при V^2 больше нуля), в интересующем нас случае для столкновения должно выполняться $V < V_1$ либо $V > V_2$. В комбинации с соотношением (4) ($V > 5u/6$) это даёт ответ на первый вопрос задачи. Можно заметить, что в условиях задачи $V_1 < 5u/6$, поэтому соответствуеющее условие «не срабатывает».

На самом деле, можно догадаться, что случай А уже включён в наш ответ. Почему? Зададим себе вопрос: а не может ли столкнуться тележка с вагоном в какой-то момент времени пока они двигались, но при этом чтобы найденные тормозные пути (а мы их нашли, считая, что объекты движутся независимо друг от друга) соотносились наоборот, $S_т \leq S_в$? Легко понять, что нет. Действительно, в момент столкновения тележка всегда *догоняет вагон сзади*. Так как по условию *её торможение слабее вагона*, в ситуации, когда тележка проезжала бы сквозь вагон, «не замечая его», она всегда в ходе последующего после столкновения «движения» проходила бы больший путь. Поэтому в случае столкновения по способу А условие $S_т \geq S_в$ также выполняется, а значит, оно необходимо и достаточно, чтобы объекты столкнулись.

Теперь найдём относительную скорость столкновения. Случай А можно изучить прямым расчётом, но здесь мы снова воспользуемся простыми соображениями, быстро приводящими к правильному ответу. Относительное расстояние Z между вагоном и тележкой меняется равноускоренно с постоянным ускорением $a = (\mu_1-\mu_2)g$. В начальный момент и в момент столкновения $Z = 0$. Такое движение — закон изменения Z со временем — устроено точно также как движение тела, брошенного вверх, в поле силы тяжести. Уравненния для $Z(t)$ и скорости изменения величины Z — относительной скорости тележки и вагона $V_{отн} = Z'(t)$ — в точности такие же, как при бросании тела вверх, только вместо ускорения свободного падения в них фигурирует упомянутое a.

Относительная скорость вагона и тележки $Z'(0)$ в начальный момент $t = 0$ равна u по условию, при этом $Z = 0$. В конечный момент Z снова обращается в ноль. Нет необходимости решать эти уравнения! Ведь в аналогичном движении тела, брошенного вертикально, ответ нам хорошо известен: тело упадёт с той же скоростью, с какой мы его бросили!

То есть относительная скорость тележки и вагона (при условии, что они всё-таки столкнутся) будет равна u.

Этот результат можно получить и напрямую, рассмотрев равноускоренное движение вагона и тележки, однако как и в первом вопросе задачи это достаточно нерациональный способ решения.

В случае Б ответ чуть более громоздкий. Здесь тележка врезается в покоящийся вагон, пройдя такой же как он путь $S_в$. По закону сохранения энергии часть первоначальное кинетической энергии тележки перейдёт в тепло посредством работы силы трения, а соударение произойдет со скоростью u':

$$\frac{m(V-5u/6)^2}{2} = \frac{mu'^2}{2} + \mu_2 mgS_в \qquad \Rightarrow \qquad u' = \sqrt{(V-5u/6)^2 - 2\mu_2 gS_в} = \sqrt{(V-5u/6)^2 - \frac{\mu_2(V+u/6)^2}{\mu_1}}. \tag{8}$$

В последнем равенстве мы подставили ранее найденное $S_в$. Это решение «работает», если выражение под корнем положительно. В противном случае относительная скорость при столкновении равна u.

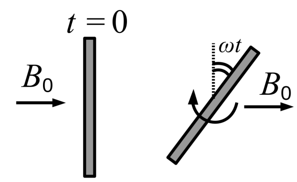
Ответ: Чтобы столкновение произошло, начальная скорость вагона должна удовлетворять $V > \max(5u/6, V_2)$, где V_2 задаются соотношением (7).

Если столкновение имеет место, оно происходит с относительной скоростью u', задаваемой формулой (7), если выражение под корнем в (7) положительно. В противном случае относительная скорость при столкновении равна u.

Задача 4. В первом опыте кольцо разорвалось, потому что на каждый его маленький кусочек длиной dl действовала сила Ампера $dF_{\text{разрыва}} = I_{max} B\, dl$. Это условие разрыва кольца нам пригодится, чтобы понять, когда оно рвётся во втором опыте.

Во втором опыте кольцо вращают, при этом через него меняется магнитный поток по закону

$$\Phi(t) = B\pi R^2 \cos\omega t.$$



Этому соответствует ЭДС индукции $-d\Phi/dt$ и соответствующий ток, кторый побежит через кольцо во втором опыте:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{B\pi R^2\omega \sin\omega t}{r}.$$

Пусть в данный момент t кольцо ориентировано под углом ωt (см. рис. — вид «сверху» относительно картинки, даной в условии наглядно показывает, как мы ввели отсчёт угла). Тогда этот ток во внешнем магнитном поле будет действовать на кусочек кольца dl с силой

$$dF = I(t)B(t)\, dl = \frac{B\pi R^2\omega \sin\omega t B\cos\omega t\, dl}{r} = \frac{B^2\pi R^2\omega \sin 2\omega t\, dl}{2r},$$

здесь мы учли, что наружу кольца будет направлена только сила Ампера, создаваемая компонентой поля $B\cos\omega t$.

Получившаяся сила достигает максимума, когда синус равен единице, и эта величина должна соответствовать силе, достаточной для разрыва:

$$I_{max} B\, dl = \frac{B^2\pi R^2\omega\, dl}{2r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B\pi R^2\omega}{2r} = I_{max}.$$

Осталось выразить ω и использовать $L = 2\pi R$.

Ответ: Кольцо разорвётся при угловой скорости вращения

$$\omega = \frac{8\pi r I_{max}}{BL^2}.$$

Задача 5. Обозначим за x расстояние между глазом наблюдателя N и осью цилиндра. Легко связать его с угловым размером цилиндра $2\beta_0$ для наблюдателя (см. рис. 1, картинка нарисована в горизонтальной плоскости):

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{R}{\sin\alpha_0}. \tag{9}$$

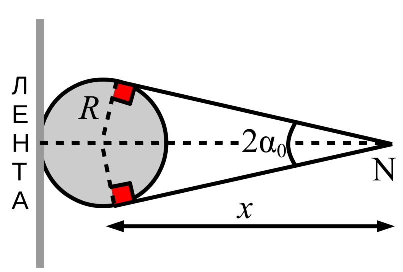


Рис. 1:

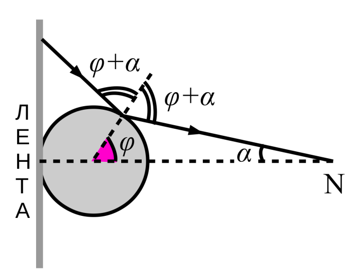


Рис. 2:

Теперь рассмотрим луч, который лежит в горизонтальной плоскости и который попадает со светящейся ленты на цилиндр, отражается от него и попадает в глаз наблюдателя под углом α к перпендикуляру, опущенному на стену из глаза наблюдателя (см. рис. 2).

Такие лучи будут попадать на разные участки цилиндра, соответствующие разным углам φ на рисунке. Угол падения и угол отражения при этом будут равны $\varphi+\alpha$.

Луч, который попадает на цилиндр под наименьшим углом φ – тот, который идёт от очень удалённой части полосы. Именно он изображён на рисунке 3, и именно он определяет, какая часть цилиндра будет светящейся. Несветящаяся часть цилиндра – точки, лежащие внутри угла φ, выделенного цветом на рис. 3, а также симметричные им относительно NO точки цилиндра.

Из этого же рисунка видно, что угол $\varphi+\alpha$ и угол φ в сумме образуют прямой угол. Поэтому

$$2\varphi+\alpha=90^\circ. \tag{10}$$

По условию от нас требуется найти 2α, но теперь понятно, что это элементарно, если вычислить φ.

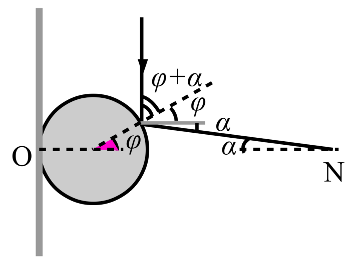


Рис. 3:

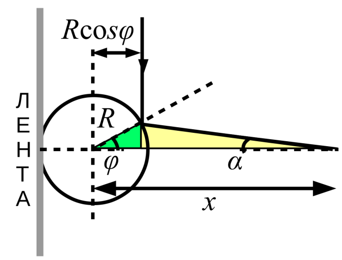


Рис. 4:

Осталось рассмотреть зелёный и жёлтый треугольники на рис. 3, написав для их общего катета

$$R\sin\varphi=(x-R\cos\varphi)\operatorname{tg}\alpha.$$

Преобразуем:

$$R\sin\varphi\cos\alpha=(x-R\cos\varphi)\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad R(\sin\varphi\cos\alpha+\cos\varphi\sin\alpha)=x\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad R\sin(\varphi+\alpha)=x\sin\alpha.$$

Далее используем, что согласно (10) $\alpha=90^\circ-2\varphi$: $R\sin(90^\circ-\varphi)=x\sin(90^\circ-2\varphi)$. Отсюда

$$R\cos\varphi=x\cos 2\varphi=x(2\cos^2\varphi-1).$$

Это уравнение решается как квадратное относительно $\cos\varphi$:

$$2x\cos^2\varphi-R\cos\varphi-x=0 \qquad \cos\varphi=\frac{R\pm\sqrt{R^2+8x^2}}{4x}.$$

Осталось подставить сюда (9), отбросить нефизичный корень и получить ответ.

Ответ: Угловой размер сужения $2\alpha=180^\circ-4\varphi$, где

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\sin\alpha_0+\sqrt{\sin^2\alpha_0+8}}{4}\right).$$