Городская открытая олимпиада школьников по физике 2022/23 года

Заключительный этап

Городской тур 2022/23. 9 класс

Задача 1.

Обозначим угловую скорость вращения цилиндра ω.

В неинерциальной системе отсчета, которая вращается вместе с «Орионом», на покоящегося космонавта массой m действует центробежная сила

$$m\omega^2 R = mg \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{1}$$

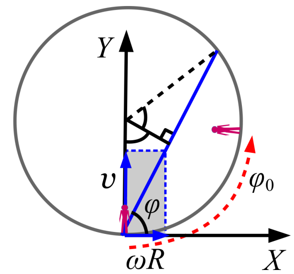

Рис. 1:

Решать задачу будем в инерциальной системе отсчета – в ней на дротик не действуют силы инерции, то есть он летит прямолинейно и равномерно. Направим оси координат, как показано на рис. 1. Начало отсчёта поместим в место начального положения дротика. Обозначим за u полную скорость дротика.

Кроме компоненты скорости v, направленной вдоль Y, дротик имеет составляющую скорости ωR, направленную вдоль оси X, она связана с вращением цилиндра.

Так как на дротик в полёте не действуют никакие силы, он движется прямолинейно и равномерно. Из рисунка видно, что полная скорость дротика

$$u = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}.$$

Введем угол φ, как показано на рисунке:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{\omega R} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \operatorname{arctg}(v/\omega R). \tag{2}$$

Путь, который пролетел дротик, отмечен на рисунке синей линией. Он опирается на дугу с углом 2φ и имеет длину $L_0 = 2R\sin\varphi$. Время, за которое дротик преодолел это расстояние

$$t = \frac{L_0}{u} = \frac{2R\sin\varphi}{\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}}.$$

За это время космонавт, вращаясь вместе со станцией, повернётся на угол

$$\varphi_0 = \omega t = \frac{2R\omega\sin\varphi}{\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}}.$$

Поэтому расстояние, которое нужно пройти космонавту, $L = R|2\varphi - \varphi_0|$. Так как длина дуги, по которой переместился космонавт за время полёта дротика, всегда больше длины хорды, по которой летит дротик, а скорость дротика по абсолютной величине больше скорости космонавта, то $\varphi_0 < 2\varphi$. Поэтому

$$L = R\left(2\varphi - \varphi_0\right) = 2R\left(\varphi - \frac{R\omega\sin\varphi}{\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}}\right).$$

Подставляя сюда ω из (1) и φ из (2), получим ответ.

<u>Ответ</u>: Космонавт должен пройти путь

$$L = 2R\left(\operatorname{arctg}\left(v/\sqrt{gR}\right) - \frac{\sin\left(\operatorname{arctg}\left(v/\sqrt{gR}\right)\right)}{\sqrt{v^2/(gR) + 1}}\right).$$

Задача 2.

В начале определим зависимость температуры T от времени t для проводника с полной теплоёмкостью C и сопротивлением R. Связь переданной стсьеме теплоты с изменением температуры пружины имеет вид $Q = C\Delta T$.

Пусть $t = 0$ соответствует времени начала нагревания проводника. По формуле Джоуля-Ленца тепло выделяется с мощностью U^2/R, поэтому

$$Q = \frac{U^2 t}{R} = C\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta T(t) = \frac{U^2}{CR}t.$$

Удлинение x исходной пружины по закону Гука равно

$$x(t) = \frac{mg}{k(t)} = \frac{mg}{k_0 - \alpha \Delta T(t)} = \frac{mg}{k_0 - \alpha U^2 t/(CR)}. \qquad (3)$$

После разрезания пружины теплоёмкости и сопротивления каждой половины равны $R/2$ и $C/2$. А вот жёсткость каждой половины удвоится – ведь под действием той же силы половина пружины растягивается в два раза меньше, чем целая пружина! Поэтому для каждой половины пружины её жесткость зависит от температуры по закону

$$\tilde{k}(T) = 2k_0 - 2\alpha \Delta T$$

– параметры k_0 и α для половинки пружины также в два раза больше, чем для целой пружины.

Если пружинку заменить на полпружинки, её растяжение, аналогично (3) получаем заменой $C \to C/2$, $R \to R/2$, $k_0 \to 2k_0$, $\alpha \to 2\alpha$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{mg}{2k_0 - 8\alpha U^2 t/(CR)}.$$

Из условия мы знаем, что $\tilde{x}(t_*) = x(t_*) = x_*$. Отсюда

$$x_* = \frac{mg}{k_0 - \alpha U^2 t_*/(CR)} = \frac{mg}{2k_0 - 8\alpha U^2 t_*/(CR)} \qquad \Rightarrow$$

$$k_0 - \frac{\alpha U^2 t_*}{CR} = \frac{mg}{x_*}, \qquad 2k_0 - 8\frac{\alpha U^2 t_*}{CR} = \frac{mg}{x_*}.$$

Это система двух уравнений, в которой неизвестны k_0 и α. Решая её, получаем ответ.

Ответ: параметры исходной пружины равны $k_0 = 7mg/(6x_*)$ и $\alpha = mgCR/(6x_* t_* U^2)$.

Задача 3.

Корабль плывёт с постоянной скоростью. Значит, суммарная мощность роботов постоянна.

Пусть робот №1 сидит ближе всего к уключине, робот №2 — в два раза дальше, а робот №3 — в три раза дальше, чем робот №1. Весло движется вокруг уключины как вокруг точки опоры рычага. Поэтому если в какой-то момент времени там, где сидит робот №1, оно движется со скоростью V, там, где тянет робот №2, его скорость $2V$. А там где весло тянет робот №3, скорость точки весла $3V$. Величина V может в разные моменты времени быть разной, но в любой момент скорости, с которыми роботы тянут весло, соотносятся как 1:2:3.

Пусть P — мощность, производимая роботом №1 в самом начале эксперимента, $P = F \cdot V \cos\alpha$ где F — сила робота, V — скорость, с которой он движет веслом, α – угол между F и V. Вектор силы у всех роботов по условию одинакова, вектор скорости весла тоже, а вот модули скорости, как мы выяснили, соотнотсятся как 1:2:3. Значит, робот №2 имеет мощность $2P$, а робот №3 — $3P$. Суммарная мощность на одном весле

$$P_{sum} = 3P + 2P + P = 6P.$$

Так как у всех роботов одинаковые аккумуляторы, они имеют одинаковый запас энергии. Следовательно, первым разрядится робот, который производит мощность $3P$, а именно, робот №3. Так как по условию он разрядился через время t_1, ёмкость аккумулятора каждого робота E_{max} составляет $3Pt_1$:

$$E_{max} = 3Pt_1.$$

После того, как робот №3 разрядился, роботы №2 и №1 должны грести с большей силой — ведь суммарная мощность корабля осталась постоянной. Сила их гребков по прежнему одинакова по условию.

Пусть P_2 — мощность, которую начал теперь производить робот №1. У робота №1 она теперь $2P_2$. Из постоянства суммарной мощности корабля

$$P_{sum} = 2P_2 + P_2 = 6P \qquad \Rightarrow \qquad P_2 = 2P.$$

Тогда, пользуясь выражением для E_{max}, можно найти время t_2, в течение которого работал робот №2 после того, как разрядился робот №1:

$$E_{max} = 2Pt_1 + 2P_2 t_2 \quad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{E_{max} - 2Pt_1}{2P_2} = \frac{3Pt_1 - 2Pt_1}{4P} = \frac{t_1}{4}.$$

В результате, второй робот разрядился через время, равное $t_1 + t_2 = 5t_1/4$.

После того, как роботы №3 и №2 разрядились, робот №1 снова увеличил силу, чтобы мощность осталась постоянной. Пусть P_3 — мощность, производимая теперь роботом №1. Найдём, зная, что мощность корабля по прежнему та же:

$$P_{sum} = 6P = P_3.$$

Зная E_{max}, можно найти время t_3, в течение которого работал робот №1 после того, как остальные разрядились:

$$E_{max} = Pt_1 + P_2t_2 + P_3t_3 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 = \frac{E_{max} - Pt_1 - P_2t_2}{P_3} = \frac{3Pt_1 - Pt_1 - 2Pt_1/4}{6P} = \frac{t_1}{4}.$$

Итого, робот №1 у каждого весла разрядится через время, равное: $t_1 + t_2 + t_3 = 3t_1/2$.

Ответ: последние роботы разрядятся через время $3t_1/2$ после начала движения.

Задача 4.

Разберёмся, какие параметры можно снять с графика.

Пусть тело после щелчка имело скорость V_0. Очевидно, её легко выразить через E_0. При движении вверх две силы будут тормозить его: проекция на направление движения силы тяжести (равная $mg\sin\alpha$) и сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. В сумме эти силы обеспечат ускорение $a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, направленное вниз вдоль наклонной плоскости.

Чтобы узнать, как высоко заберётся тело по горке (какой путь l оно пройдёт до разворота), можно решить простую задачу о равнозамедленном движении с известной начальной скоростью V_0 и известным ускорением a_1, или воспользоваться законом сохранения энергии: учесть, что работа тормозящей силы ma_1l целиком гасит кинетическую энергию E_0 (остальные силы — N и $mg\cos\alpha$ — перпендикулярны направлению движения и не совершают работы):

$$ma_1l = E_0 = \frac{mV_0^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{E_0}{ma_1} = \frac{E_0}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Обозначим длину наклонной плоскости L. Пока $l \leq L$, тело, заехав на горку, скатывается назад. У земли оно оказывается, пройдя по плоскости путь $2l$, при этом в тепло за счёт силы трения выделяется энергия $2F_{\text{тр}}l$. Отметим, что хотя при движении вверх и вниз по плоскости сила тяжести совершает работу, суммарно её можно не учитывать, так как в конце тело оказалось на той же высоте, где было исходно.

Таким образом, при $l \leq L$ (пока тело не падает с наклонной плоскости)

$$E_k = E_0 - 2F_{\text{тр}}l = E_0 - 2\mu mg\cos\alpha \cdot l = E_0 - 2\mu mg\cos\alpha\frac{E_0}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} =$$

$$= E_0\left(1 - \frac{2\mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}\right) = E_0\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \qquad \text{при} \quad \frac{E_0}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \leq L. \tag{4}$$

Таким образом, пока энергия щелчка не превысила критическое значение $mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)L$, график зависимости $E_k(E_0)$ – прямая, проходящая через начало координат. Тангенс угла её наклона – величина $(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ – очевидно, меньше 1, то есть прямая наклонена под углом, меньшим, чем 45°. Именно это мы и видим на выданном графике.

Очевидно, точка, где происходит скачок E_k, соответсвует абсциссе критического случая $E_0^* = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)L$ (14 клеточек на графике). Несложно подставить эту энергию в (4) и найти соответствующую ординату $E_k^* = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)L$ (6 клеточек).

В принципе, этого достаточно, чтобы найти, что на графике $mgL\sin\alpha$ – отрезок в 10 клеток, а величина $\mu mgL\cos\alpha$ – отрезок в 4 клетки. Разделив второе на первое, получим

$$\frac{\mu mgL\cos\alpha}{mgL\sin\alpha} = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{10}.$$

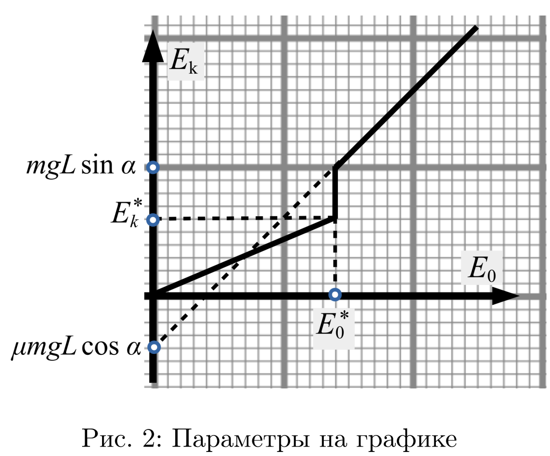

Рис. 2: Параметры на графике

С учётом того, что $\alpha = 45°$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, мгновенно получаем ответ $\mu = 0,4$.

Заметим, что найденное μ меньше чем $\operatorname{tg}\alpha$, что является условием «незастревания» тела на плоскости – сила трения для этого недостаточно велика.

В принципе, задача решена. Однако, можно убедиться, что оставшийся кусок выданного нам графика не является ошибочным.

Разберёмся, для полноты картины, что происходит при $E_0 > {E_0}^*$. При таком сильном щелчке тело гарантировано преодолевает наклонную плоскость и улетает с неё. Далее оно летит по параболе. Если бы трения не было, упав на землю, тело имело бы энергию E_0, отличие снова вызвано работой силы трения, правда, теперь это $F_{\text{тр}}l$, ведь тело едет с трением только вверх, а вниз спускается в полёте, без потерь.

Поэтому $E_k = E_0 - \mu mg\cos\alpha L$. Это график прямой, наклоненной под углом 45° и не проходящей через начало координат (при $E_0 = 0$ для E_k получается значение $-\mu mg\cos\alpha L$. Поэтому альтернативный способ найти, что соответствует на графике величина $\mu mg\cos\alpha L$ – продлить этот участок графика до пересечения с осью ординат. Разумеется, получатся те же 4 клетки.

Аналогично, можно найти из этого участка и $mgL\sin\alpha$, для этого надо заметить, что если тело имело энергию E_0^*, но в верхней точке не развернулось, чтобы ехать вниз, а сорвалось падать (без начальной скорости), оно как раз упадёт, имея энергию $mgL\sin\alpha$. При этом потенциальная энергия на верхнем краю плоскости $mgL\sin\alpha$ перейдёт в тепло. Видно, что этот отрезок снова имеет на графике длину 10 клеток.

Таким образом, чтобы решить задачу можно было внимательно обсчитать любой из случаев – когда тело разворачивается и едет вниз, или когда оно срывается с края и падает по параболе.

Ответ: Коэффициент трения равен $\mu = 0,4$.

Задача 5.

Обозначим за x расстояние между глазом наблюдателя N и осью цилиндра. Легко связать его с угловым размером цилиндра $2\alpha_0$ для наблюдателя (см. рис. 3, картинка нарисована в горизонтальной плоскости):

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{R}{\sin\alpha_0}. \tag{5}$$

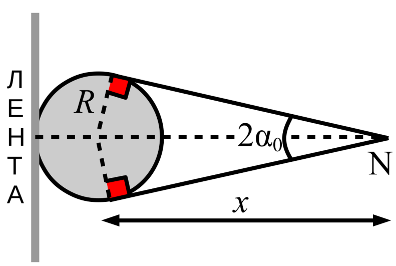

Рис. 3:

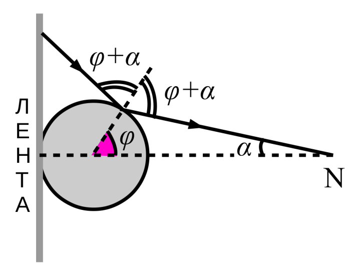

Рис. 4:

Теперь рассмотрим луч, который лежит в горизонтальной плоскости и который попадает со светящейся ленты на цилиндр, отражается от него и попадает в глаз наблюдателя под углом α к перпендикуляру, опущенному на стену из глаза наблюдателя (см. рис. 4).

Такие лучи будут попадать на разные участки цилиндра, соответствующие разным углам φ на рисунке. Угол падения и угол отражения при этом будут равны $\varphi + \alpha$.

Луч, который попадает на цилиндр под наименьшим углом φ – тот, который идёт от очень удалённой части полосы. Именно он изображён на рисунке 5, и именно он определяет, какая часть цилиндра будет светящейся. Несветящаяся часть цилиндра – точки, лежащие внутри угла φ, выделенного цветом на рис. 5, а также симметричные им относительно NO точки цилиндра.

Из этого же рисунка видно, что угол $\varphi + \alpha$ и угол φ в сумме образуют прямой угол. Поэтому

$$2\varphi + \alpha = 90^\circ. \tag{6}$$

По условию от нас требуется найти 2α, но теперь понятно, что это элементарно, если вычислить φ.

Осталось рассмотреть зелёный и жёлтый треугольники на рис. 5, написав для их общего катета

$$R\sin\varphi = (x - R\cos\varphi)\operatorname{tg}\alpha.$$

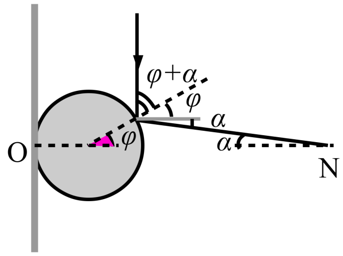

Рис. 5:

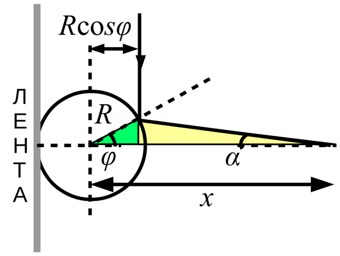

Рис. 6:

Преобразуем:

$$R\sin\varphi\cos\alpha = (x - R\cos\varphi)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad R(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) = x\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad R\sin(\varphi+\alpha) = x\sin\alpha.$$

Далее используем, что согласно (6) $\alpha = 90^\circ - 2\varphi$: $R\sin(90^\circ - \varphi) = x\sin(90^\circ - 2\varphi)$. Отсюда

$$R\cos\varphi = x\cos 2\varphi = x(2\cos^2\varphi - 1).$$

Это уравнение решается как квадратное относительно $\cos\varphi$:

$$2x\cos^2\varphi - R\cos\varphi - x = 0 \qquad \cos\varphi = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8x^2}}{4x}.$$

Осталось подставить сюда (5), отбросить нефизичный корень и получить ответ.
Ответ: Угловой размер сужения $2\alpha = 180^\circ - 4\varphi$, где

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sin\alpha_0 + \sqrt{\sin^2\alpha_0 + 8}}{4}\right).$$