

Районный тур 2022/23. 10 класс. I вариант

Задача 1.

Рассмотрим прыжок с пола. Обозначим начальную скорость кошки за \vec{v} , а время полёта за t , тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} v_x t = L, \\ v_y t - gt^2/2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

получим связь проекций скорости на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси с длиной прыжка L :

$$v_x v_y = gL/2. \quad (2)$$

При прыжке с доски это соотношение останется прежним, но начальная скорость кошки относительно пола \vec{v} будет другой, и кошка прыгнет на расстояние \tilde{L} :

$$\tilde{v}_x \tilde{v}_y = g\tilde{L}/2. \quad (3)$$

Скорость \vec{v} можно найти по правилам перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую (в начале фазы полета доску уже можно считать инерциальной системой). Из условия следует, что скорость кошки относительно доски в начале фазы полета равна начальной скорости \vec{v} относительно пола в первом прыжке, следовательно

$$\tilde{v}_x = v_x - u, \quad \tilde{v}_y = v_y, \quad (4)$$

где u — скорость доски относительно пола, с которой она поедет в противоположную прыжку сторону. Найдем эту скорость. Вдоль горизонтальной оси внешние силы на кошку и доску не действуют, следовательно выполняется закон сохранения x -проекции импульса, запишем его в системе пола:

$$m(v_x - u) - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv_x}{M + m}. \quad (5)$$

Теперь мы можем найти искомое расстояние, поделив (3) на (2) с учетом (4) и (5):

$$\tilde{L} = \frac{\tilde{v}_x}{v_x} L = \frac{M}{M + m} L = \frac{2}{3} L. \quad (6)$$

Ответ: Кошка приземлится на расстоянии $2L/3$ от места второго толчка.

Задача 2.

Когда стакан движется с ускорением, в системе отсчета стакана возникает действующая на воду сила инерции. Она направлена горизонтально противоположно вектору ускорения стакана. В результате суммарного действия сил тяжести и инерции вода приливает к стенке стакана. Часть воды может вылиться в процессе движения. Чтобы понять, какое количество воды останется в стакане, достаточно рассмотреть момент времени, когда ускорение стакана максимально и равно по модулю a . При этом не имеет значения, куда направлено ускорение, т. е. увеличивается или уменьшается проекция скорости стакана (в первом случае вода выливается через заднюю стенку, во втором — через переднюю). Для определенности будем считать, что в интересующий нас момент времени ускорение стакана направлено вправо, а вода в стакане соответственно смещается влево (см. Рис. 1). Пусть ускорение достаточно велико, так что какая-то часть воды вылилась. С учетом силы инерции можно сказать, что вода в системе отсчета, связанной со стаканом, находится в эффективном гравитационном поле, имеющим напряженность $\vec{g}_* = \vec{g} + \vec{a}$. Очевидно, что поверхность воды тогда будет перпендикулярна вектору \vec{g}_* . При этом оставшаяся вода будет иметь в плоскости рисунка треугольную форму, оголяя дно. Отметим, что вода могла бы выливаться, имея форму трапеции, касаясь обеих стенок стакана, только если бы высота стакана не превосходила $2H$. Можно записать следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{4H}{x}. \quad (7)$$

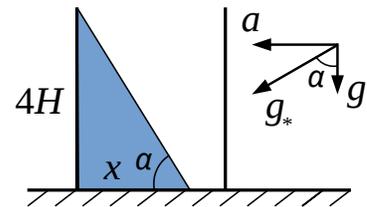


Рис. 1

Заметим, что можно было не переходить в неинерциальную систему отсчета, а рассматривать движение жидкости в исходной (лабораторной) системе. Для этого выделим мысленно небольшой объем воды массой m (см. Рис. 2). В лабораторной системе отсчета на него действует всего две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A . При этом сила Архимеда направлена перпендикулярно поверхности воды. Второй закон Ньютона для выделенного элемента воды в проекции на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид:

$$F_A \sin \alpha = ma, \quad (8)$$

$$F_A \cos \alpha - mg = 0. \quad (9)$$

Отсюда мы легко приходим к соотношению (7).

Найдем неизвестный катет x :

$$x = 4H \frac{g}{a}. \quad (10)$$

Объем воды пропорционален площади соответствующей фигуры на рисунке. Эта площадь равна $2Hx = 8(g/a)H^2$. В конечный момент времени, когда стакан постоит, вода имеет форму прямоугольника с площадью $3hH$. Приравнявая эти площади, получаем

$$h = \frac{8g}{3a} H. \quad (11)$$

Равенство высот $h = H$ имеет место при $a = 8g/3$. Очевидно, что это минимальное значение ускорения a , при котором происходит выливание воды из стакана и реализуется ситуация, изображенная на Рис. 1. Таким образом, при $a \leq 8g/3$ уровень воды остается прежним ($h = H$), а при $a > 8g/3$ имеем $h = (8/3)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 3.

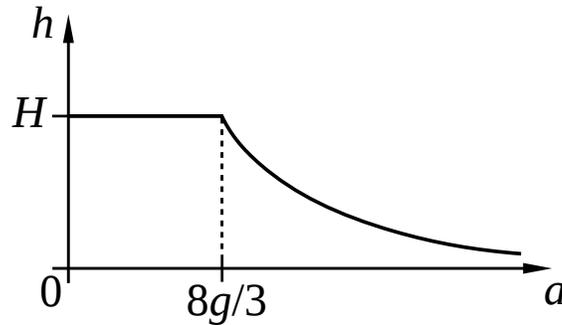


Рис. 3

Ответ: Если $a \leq 8g/3$, то $h = H$; если $a > 8g/3$, то $h = (8/3)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 3.

Задача 3.

Обозначим массы поршней в узком и широком сосудах через m_1 и m_2 соответственно. Для удобства введем также $S_1 \equiv S$ и $S_2 \equiv 3S$. Предположим, что в состоянии равновесия большой поршень находится выше маленького на высоту H . Приравнявая давления жидкости на уровне маленького поршня, получаем (p_0 — внешнее давление):

$$p_0 + \frac{m_1 g}{S_1} = p_0 + \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g H \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{1}{\rho} \left(\frac{m_1}{S_1} - \frac{m_2}{S_2} \right). \quad (12)$$

При надавливании на поршень и его перемещении на расстояние x вниз над системой совершается положительная работа. Эта работа равна

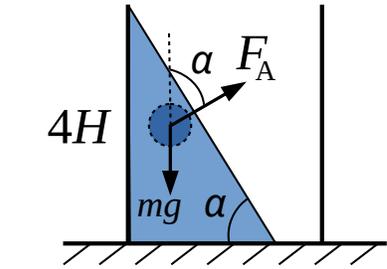


Рис. 2

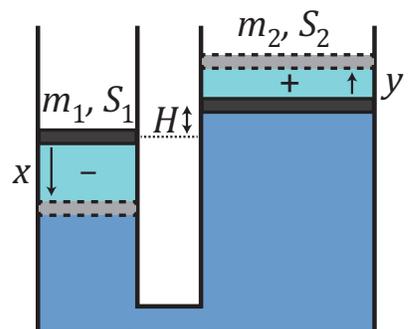


Рис. 4

изменению потенциальной энергии системы ΔU . Когда поршень отпускают, начинаются колебания, которые постепенно затухают из-за наличия вязкости. Система возвращается в исходное состояние механического равновесия. Поскольку сообщающиеся сосуды теплоизолированы, вся совершенная над системой работа приводит к ее нагреву, то есть

$$\Delta U = C\Delta T \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta T = \frac{\Delta U}{C}. \quad (13)$$

Поскольку объем жидкости сохраняется, перемещения маленького x и большого y поршней связаны соотношением

$$S_1x = S_2y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{S_1}{S_2}x. \quad (14)$$

Рассчитаем изменение потенциальной энергии системы по сравнению с состоянием равновесия. Маленький поршень опускается на величину x , что уменьшает энергию на величину m_1gx . Большой поршень поднимается на y . Соответствующее изменение энергии равно m_2gy . Разберемся с потенциальной энергией жидкости. Все изменение можно представить как перенос жидкости массой ρxS_1 из одного сосуда в другой из области, помеченной на Рис. 4 знаком “-”, в область, отмеченную знаком “+”. При этом центр масс перемещаемого объема жидкости поднимается с уровня $-x/2$ относительно маленького поршня на уровень $H + y/2$. Таким образом, полное изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = -m_1gx + m_2gy + \rho xS_1g \left[H + \frac{y}{2} - \left(-\frac{x}{2} \right) \right]. \quad (15)$$

С учетом (12) и (13) имеем

$$\Delta T = \frac{\rho gx^2S_1}{2C} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{2\rho gx^2S}{3C}. \quad (16)$$

В решении мы предполагали, что в равновесии большой поршень находится выше маленького, однако все выкладки остаются в силе и в обратном случае, если считать H отрицательным.

Ответ: Изменение температуры системы составляет $2\rho gx^2S/(3C)$.

Задача 4.

Обозначим длину ребра кубика за a , удельные сопротивления материалов, из которых изготовлены кубики, через ρ_1 и ρ_2 . Согласно условию линии тока направлены всегда перпендикулярно граням, к которым подключен источник. Поэтому для определения сопротивлений можно пользоваться формулой $R = \rho l/S$, где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения. Сопротивления кубиков равны

$$R_1 = \frac{\rho_1 a}{a^2} = \frac{\rho_1}{a}, \quad R_2 = \frac{\rho_2 a}{a^2} = \frac{\rho_2}{a}. \quad (17)$$

На левой части Рис. 5 кубики подключены к источнику последовательно, поэтому полное сопротивление составляет

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{a}. \quad (18)$$

При изменении формы кубиков объем сохраняется. Следовательно, увеличение длины проводника в λ раз приводит к уменьшению площади поперечного сечения в λ раз. В результате сопротивления становятся равными

$$R'_1 = \frac{\rho_1 \lambda a}{a^2/\lambda} = \frac{\lambda^2 \rho_1}{a}, \quad R'_2 = \frac{\rho_2 \lambda a}{a^2/\lambda} = \frac{\lambda^2 \rho_2}{a}. \quad (19)$$

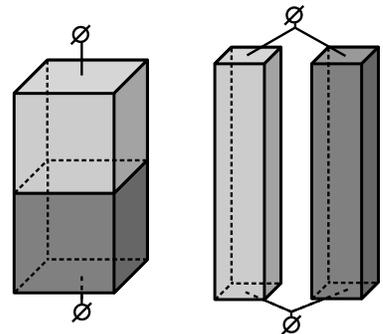


Рис. 5

На правой части Рис. 5 вытянутые кубики подключены параллельно. Полное сопротивление равно

$$R_{\text{II}} = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} = \frac{\lambda^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) a}. \quad (20)$$

По условию в обоих случаях в цепи течет одинаковый ток. Значит, сопротивления R_{I} и R_{II} должны совпадать:

$$R_{\text{I}} = R_{\text{II}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho_1 + \rho_2}{a} = \frac{\lambda^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) a}. \quad (21)$$

Сокращая на a и вводя переменную $x \equiv \rho_1/\rho_2$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + (2 - \lambda^2)x + 1 = 0. \quad (22)$$

Решения этого уравнения

$$x_{\pm} = \frac{(\lambda^2 - 2) \pm \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}}{2}. \quad (23)$$

Отметим, что $x_+ x_- = 1$. Таким образом, x_+ дает отношение большего удельного сопротивления к меньшему, а x_- — обратную величину. То есть оба решения квадратного уравнения описывают одну и ту же ситуацию. Решения имеют смысл только при $\lambda \geq 2$. В противном случае условие задачи не может быть реализовано. При $\lambda = 2$, естественно, $x_+ = x_- = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$.

Ответ: Отношение большего удельного сопротивления к меньшему равно $[(\lambda^2 - 2) + \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}]/2$. Решение существует только при $\lambda \geq 2$.

Задача 5.

См. решение задачи 5 в варианте для 11 класса.

Районный тур 2022/23. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Рассмотрим прыжок с пола. Обозначим начальную скорость кошки за \vec{v} , а время полёта за t , тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} v_x t = L, \\ v_y t - gt^2/2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

получим связь проекций скорости на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси с длиной прыжка L :

$$v_x v_y = gL/2. \quad (25)$$

При прыжке с доски это соотношение останется прежним, но начальная скорость кошки относительно пола \vec{v} будет другой, и кошка прыгнет на расстояние \tilde{L} :

$$\tilde{v}_x \tilde{v}_y = g\tilde{L}/2. \quad (26)$$

Скорость \vec{v} можно найти по правилам перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую (в начале фазы полета доску уже можно считать инерциальной системой). Из условия следует, что скорость кошки относительно доски в начале фазы полета равна начальной скорости \vec{v} относительно пола в первом прыжке, следовательно

$$\tilde{v}_x = v_x - u, \quad \tilde{v}_y = v_y, \quad (27)$$

где u — скорость доски относительно пола, с которой она поедет в противоположную прыжку сторону. Найдем эту скорость. Вдоль горизонтальной оси внешние силы на кошку и доску не действуют, следовательно выполняется закон сохранения x -проекции импульса, запишем его в системе пола:

$$m(v_x - u) - Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv_x}{M + m}. \quad (28)$$

Теперь мы можем найти искомое расстояние, поделив (26) на (25) с учетом (27) и (28):

$$\tilde{L} = \frac{\tilde{v}_x}{v_x} L = \frac{M}{M + m} L = \frac{3}{4} L. \quad (29)$$

Ответ: Кошка приземлится на расстоянии $3L/4$ от места второго толчка.

Задача 2.

Когда стакан движется с ускорением, в системе отсчета стакана возникает действующая на воду сила инерции. Она направлена горизонтально противоположно вектору ускорения стакана. В результате суммарного действия сил тяжести и инерции вода приливает к стенке стакана. Часть воды может вылиться в процессе движения. Чтобы понять, какое количество воды останется в стакане, достаточно рассмотреть момент времени, когда ускорение стакана максимально и равно по модулю a . При этом не имеет значения, куда направлено ускорение, т. е. увеличивается или уменьшается проекция скорости стакана (в первом случае вода выливается через заднюю стенку, во втором — через переднюю). Для определенности будем считать, что в интересующий нас момент времени ускорение стакана направлено вправо, а вода в стакане соответственно смещается влево (см. Рис. 6). Пусть ускорение достаточно велико, так что какая-то часть воды вылилась. С учетом силы инерции можно сказать, что вода в системе отсчета, связанной со стаканом, находится в эффективном гравитационном поле, имеющим напряженность $\vec{g}_* = \vec{g} + \vec{a}$. Очевидно, что поверхность воды тогда будет перпендикулярна вектору \vec{g}_* . При этом оставшаяся вода будет иметь в плоскости рисунка треугольную форму, оголяя дно. Отметим, что вода могла бы выливаться, имея форму трапеции, касаясь обеих стенок стакана, только если бы высота стакана не превосходила $2H$. Можно записать следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{3H}{x}. \quad (30)$$

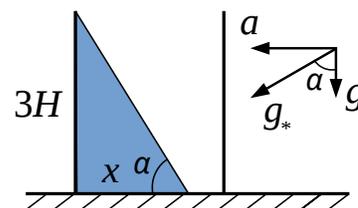


Рис. 6

Заметим, что можно было не переходить в неинерциальную систему отсчета, а рассматривать движение жидкости в исходной (лабораторной) системе. Для этого выделим мысленно небольшой объем воды массой m (см. Рис. 7). В лабораторной системе отсчета на него действует всего две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда \vec{F}_A . При этом сила Архимеда направлена перпендикулярно поверхности воды. Второй закон Ньютона для выделенного элемента воды в проекции на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид:

$$F_A \sin \alpha = ma, \quad (31)$$

$$F_A \cos \alpha - mg = 0. \quad (32)$$

Отсюда мы легко приходим к соотношению (30).

Найдем неизвестный катет x :

$$x = 3H \frac{g}{a}. \quad (33)$$

Объем воды пропорционален площади соответствующей фигуры на рисунке. Эта площадь равна $(3/2)Hx = (9/2)(g/a)H^2$. В конечный момент времени, когда стакан покоится, вода имеет форму прямоугольника с площадью $3hH$. Приравнявая эти площади, получаем

$$h = \frac{3g}{2a} H. \quad (34)$$

Равенство высот $h = H$ имеет место при $a = 3g/2$. Очевидно, что это минимальное значение ускорения a , при котором происходит выливание воды из стакана и реализуется ситуация, изображенная на Рис. 6. Таким образом, при $a \leq 3g/2$ уровень воды остается прежним ($h = H$), а при $a > 3g/2$ имеем $h = (3/2)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 8.

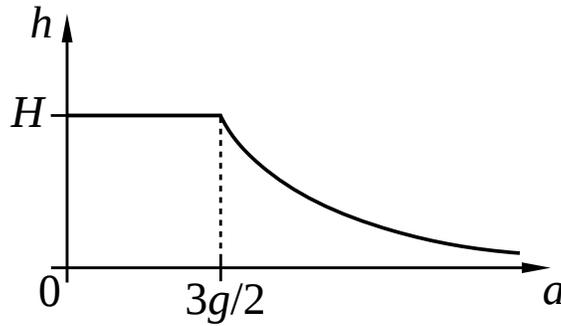


Рис. 8

Ответ: Если $a \leq 3g/2$, то $h = H$; если $a > 3g/2$, то $h = (3/2)(g/a)H$. График функции $h(a)$ изображен на Рис. 8.

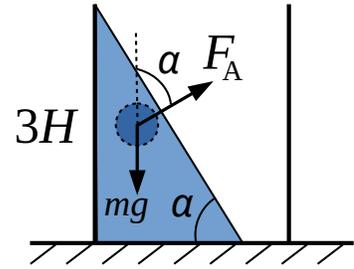


Рис. 7

Задача 3.

Обозначим массы поршней в широком и узком сосудах через m_1 и m_2 соответственно. Для удобства введем также $S_1 \equiv 4S$ и $S_2 \equiv S$. Предположим, что в состоянии равновесия большой поршень находится выше маленького на высоту H . Приравнявая давления жидкости на уровне маленького поршня, получаем (p_0 — внешнее давление):

$$p_0 + \frac{m_2 g}{S_2} = p_0 + \frac{m_1 g}{S_1} + \rho g H \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{1}{\rho} \left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1} \right). \quad (35)$$

При надавливании на поршень и его перемещении на расстояние x вниз над системой совершается положительная работа. Эта работа равна изменению потенциальной энергии системы ΔU . Когда поршень отпускают, начинаются колебания, которые постепенно затухают из-за наличия вязкости. Система возвращается в исходное состояние механического равновесия. Поскольку сообщающиеся сосуды теплоизолированы, вся совершенная над системой работа приводит к ее нагреву, то есть

$$\Delta U = C \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{\Delta U}{C}. \quad (36)$$

Поскольку объем жидкости сохраняется, перемещения большого x и маленького y поршней связаны соотношением

$$S_1 x = S_2 y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{S_1}{S_2} x. \quad (37)$$

Рассчитаем изменение потенциальной энергии системы по сравнению с состоянием равновесия. Большой поршень опускается на величину x , что уменьшает энергию на величину $m_1 g x$. Маленький поршень поднимается на y . Соответствующее изменение энергии равно $m_2 g y$. Разберемся с потенциальной энергией жидкости. Все изменение можно представить как перенос жидкости массой $\rho x S_1$ из одного сосуда в другой из области, помеченной на Рис. 9 знаком “-”, в область, отмеченную знаком “+”. При этом центр масс перемещаемого объема жидкости поднимается с уровня $-x/2$ относительно большого поршня на уровень $-H + y/2$. Таким образом, полное изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = -m_1 g x + m_2 g y + \rho x S_1 g \left[-H + \frac{y}{2} - \left(-\frac{x}{2} \right) \right]. \quad (38)$$

С учетом (35) и (36) имеем

$$\Delta T = \frac{\rho g x^2 S_1}{2C} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{10 \rho g x^2 S}{C}. \quad (39)$$

В решении мы предполагали, что в равновесии большой поршень находится выше маленького, однако все выкладки остаются в силе и в обратном случае, если считать H отрицательным.

Ответ: Изменение температуры системы составляет $10 \rho g x^2 S / C$.

Задача 4.

Обозначим длину ребра кубика за a , удельные сопротивления материалов, из которых изготовлены кубики, через ρ_1 и ρ_2 . Согласно условию линии тока направлены всегда перпендикулярно граням, к которым подключен источник. Поэтому для определения сопротивлений можно пользоваться формулой $R = \rho l / S$, где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения. Сопротивления кубиков равны

$$R_1 = \frac{\rho_1 a}{a^2} = \frac{\rho_1}{a}, \quad R_2 = \frac{\rho_2 a}{a^2} = \frac{\rho_2}{a}. \quad (40)$$

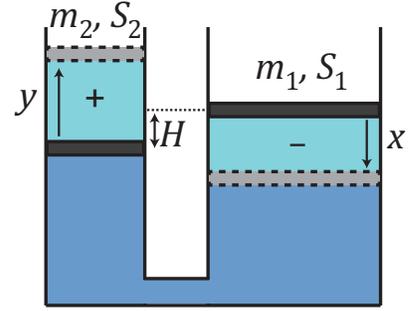
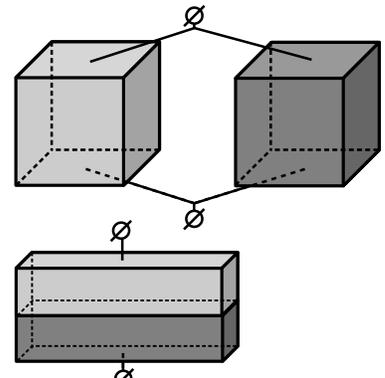


Рис. 9



На верхней части Рис. 10 кубики подключены к источнику параллельно, поэтому полное сопротивление составляет

$$R_{\text{I}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)a}. \quad (41)$$

При изменении формы кубиков объем сохраняется. Следовательно, уменьшение длины проводника в λ раз приводит к увеличению площади поперечного сечения в λ раз. В результате сопротивления становятся равными

$$R'_1 = \frac{\rho_1 a / \lambda}{\lambda a^2} = \frac{\rho_1}{\lambda^2 a}, \quad R'_2 = \frac{\rho_2 a / \lambda}{\lambda a^2} = \frac{\rho_2}{\lambda^2 a}. \quad (42)$$

На нижней части Рис. 10 сплюсненные кубики подключены последовательно. Полное сопротивление равно

$$R_{\text{II}} = R'_1 + R'_2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda^2 a}. \quad (43)$$

По условию в обоих случаях в цепи течет одинаковый ток. Значит, сопротивления R_{I} и R_{II} должны совпадать:

$$R_{\text{I}} = R_{\text{II}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)a} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda^2 a}. \quad (44)$$

Сокращая на a и вводя переменную $x \equiv \rho_1 / \rho_2$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + (2 - \lambda^2)x + 1 = 0. \quad (45)$$

Решения этого уравнения

$$x_{\pm} = \frac{(\lambda^2 - 2) \pm \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}}{2}. \quad (46)$$

Отметим, что $x_+ x_- = 1$. Таким образом, x_+ дает отношение большего удельного сопротивления к меньшему, а x_- — обратную величину. То есть оба решения квадратного уравнения описывают одну и ту же ситуацию. Решения имеют смысл только при $\lambda \geq 2$. В противном случае условие задачи не может быть реализовано. При $\lambda = 2$, естественно, $x_+ = x_- = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$.

Ответ: Отношение большего удельного сопротивления к меньшему равно $[(\lambda^2 - 2) + \sqrt{(\lambda^2 - 2)^2 - 4}]/2$. Решение существует только при $\lambda \geq 2$.

Задача 5.

См. решение задачи 5 в варианте для 11 класса.