Задача 10.1. Теорема Гаусса

Протекание тока по токопроводящей бумаге широко используется для моделирования электростатического поля, поскольку согласно закону Ома в дифференциальной форме $j = \gamma E$, где γ – удельная проводимость, и распределение напряженности E повторяет ход линий плотности тока j.

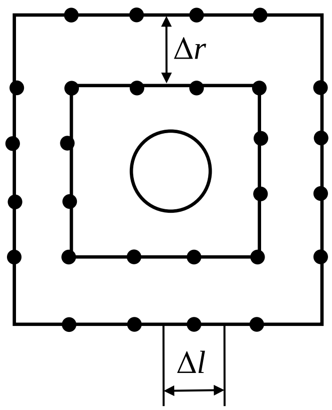
5. С использованием предложенного оборудования (установка и шаблон) определите линейную плотность заряда электродов $\tau = q/h$ и погонную электрическую емкость двухпроводной линии $C_n = C/h$, где h – толщина токопроводящей бумаги. Диэлектрическую проницаемость проводящей бумаги примите равной $\varepsilon = 1$.
6. Определите линейную плотность заряда электродов и погонную электрическую емкость двухпроводной линии на основе измерения напряженности в точке посередине между электродами.
7. Определите погонную электрическую емкость двухпроводной линии на основе измерения геометрических размеров установки.
8. Сопоставьте полученные результаты.

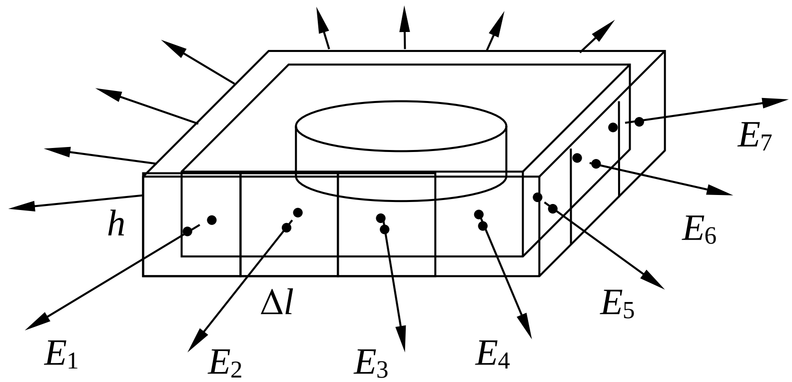
Оборудование: планшет с проводящей бумагой и электродами, прямоугольный шаблон с отверстиями, источник питания, вольтметр, миллиметровка.

Решение

1. По теореме Гаусса

$$\Phi = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \oint_S \varepsilon\varepsilon_0 E_n dS = q .$$





$$E_i = -\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta r}, \quad \Phi = \sum_i \varepsilon\varepsilon_0 E_i h \Delta l = -\frac{h\Delta l}{\Delta r}\sum_i \Delta\varphi_i = q$$

$$\tau = \frac{q}{h} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta l}{\Delta r}\sum_i \Delta\varphi_i = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta l}{\Delta r}\left(\sum_i \varphi_{i\ \text{внут}} - \sum_i \varphi_{i\ \text{внеш}}\right),$$

где $\varphi_{i\ \text{внут}}$ – потенциалы на внутреннем контуре, причем углы учитываются дважды, а $\varphi_{i\ \text{внеш}}$ – потенциалы на внешнем контуре без угловых точек.

$$C_n = \frac{q}{hU} = \frac{\tau}{U},$$

где U – напряжение между электродами.

2. $E = -\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r} = 2\dfrac{2k\tau}{r} = \dfrac{4k\tau}{l/2} = \dfrac{2\tau}{\pi\varepsilon_0 l}$,

где l – расстоянии между электродами,

$$\tau = -\frac{\pi\varepsilon_0 l}{2}\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}, \quad C_n = \frac{\tau}{U}$$

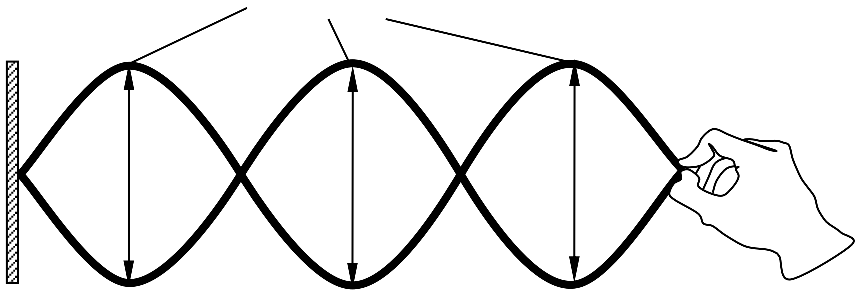
3. $U = 2\displaystyle\int_R^l \frac{2k\tau}{r}dr = 4k\tau \ln\frac{l}{R}, \qquad C_n = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{l}{R}}.$

Критерии оценивания 10.1

1.	Проведены измерения потенциалов по контуру шаблона	**2**
2.	Проведены измерения потенциалов на малом расстоянии друг от друга вблизи середины между электродами	**1**
3.	Проведены измерения геометрических размеров планшета	**1**
4.	Найдено τ п. 1	**4**
5.	Найдено C_n п. 1	**2**
6.	Найдено τ п. 2	**2**
7.	Найдено C_n п. 2	**1**
8.	Найдено C_n п. 3	**1**
9.	Сделан содержательный вывод	**1**

Задача 10.2. Поперечные колебания массивной пружины

Период изгибных колебаний в стоячей волне на массивной пружине зависит от длины пружины и от количества пучностей в волне как $T = Am^a l^b$. Определите на основе эксперимента параметры этой зависимости A, a и b.



Оборудование: массивная пружина, смартфон или планшет для видеофиксации, мерная лента, струбцина или зажим, миллиметровая бумага.

Решение

Закрепим один конец пружины струбциной на краю стола. Создадим рукой вынужденные колебания в поперечном направлении. При правильном подборе частоты колебаний руки формируется стоячая волна, которую фиксируем на видео с помощью планшета. Увеличение частоты колебанй позволяет наблюдать две или даже 3 пучности.

Снимаем зависимость $T(l)$ для $m = 1, 2, 3$.

Комментарий

Теоретическую зависимость можно получить нижеследующим образом, однако это не требовалось в работе.

$$l = \frac{m\lambda}{2} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad kl = m\pi$$

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}$$

Для стержня:

$$v_{ф} = \sqrt[4]{\frac{ER^2}{\rho}}\sqrt{\omega}\ ,$$

где R – радиус инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба и проходящей через нейтральную поверхность, ρ – плотность материала стержня.

Учитывая, что для кольца радиусом R_0 момент инерции $I = mR_0^2/2 = mR^2$, получаем, что $R = R_0/\sqrt{2}$. Плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R_0^2 l}$.

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega l}{m\pi} = \sqrt[4]{\frac{ER_0^2}{2\frac{m}{\pi R_0^2 l}}}\sqrt{\omega}$$

$$\sqrt{\omega} = \frac{m\pi}{l}\sqrt[4]{\frac{E\pi R_0^4 l}{2m}}$$

$$\nu = \frac{m^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\pi^3 R_0^4 l}{8m}}$$

$$T = \frac{l^{1,5}}{m^2}\sqrt{\frac{8m}{E\pi^3 R_0^4}}$$

Критерии оценивания 10.2

1. Проведены измерения T от l при $m=1$	1
2. Проведены измерения T от l при $m=2$	2
3. Проведены измерения T при некотором l при $m=3$	3
4. Построена зависимость $\ln T$ от $\ln l$ при $m=1$	2
5. Построена зависимость $\ln T$ от $\ln l$ при $m=2$	2
6. Определен показатель степени a	2
7. Определен показатель степени b	1
8. Определен коэффициент A	2