Городской тур 2023/24. 10 класс

Задача 1.

Так как предмет запустили вдоль стены в плоскости рисунка, его начальная скорость направлена под углом α к горизонту. Обозначим модуль его начальной скорости за V_0. Тело двигалось по дуге ABC без трения, поэтому к моменту удара о пол имеет ту же скорость V_0, направленную под углом α к горизонту (синяя стрелка на Рис. 1). Сразу после удара предмет, имея скорость $V_0/2$ (красная стрелка), полетит под углом α к горизонту по параболе.

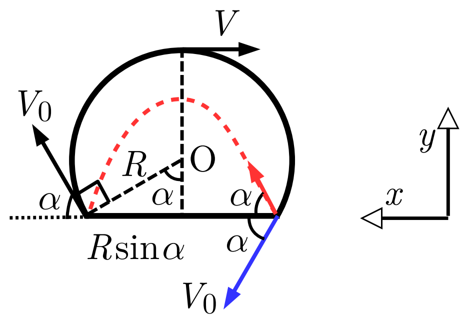

Рис. 1:

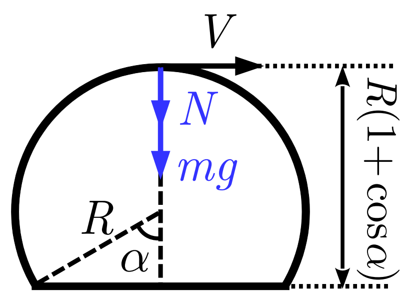

Рис. 2:

Дальность полета при этом вычисляется из законов равноускоренного движения в поле силы тяжести:

$$x(t) = (V_0/2)\cos\alpha\, t, \qquad y(t) = (V_0/2)\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

При $y = 0$ из второго соотношения вычисляется время полета $t = V_0 \sin\alpha/g$, в этот момент из первого соотношения $x = V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha/(2g)$. Понятно, что по условию дальность полета должна совпадать с $2R\sin\alpha$, где R — радиус дуги окружности AOB (см. Рис. 1). Приравнивая, получаем

$$\frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2g} = 2R\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad V_0^2 = \frac{4gR}{\cos\alpha}. \tag{2}$$

Теперь учтем, что в верхней точке B траектории тело не отрывалось от поверхности туннеля. В этот момент сила реакции N, действующая со стороны туннеля на предмет, неотрицательна. Ситуации с отрицательной N соответствует физическая ситуация, когда предмет оторвался от стенки туннеля в процессе движения и, начав полет по параболе, просто не доехал до точки B. Физически это означает, что начальная скорость V_0 недостаточна, чтобы преодолеть мертвую петлю. По второму закону Ньютона при движении по окружности (см. Рис. 2)

$$\frac{mV^2}{R} = mg + N, \quad N \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad V^2 \geqslant gR. \tag{3}$$

Скорость V в этот момент найдем по закону сохранения энергии:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgR(1+\cos\alpha) + \frac{mV^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = V_0^2 - 2gR(1+\cos\alpha) = \frac{4gR}{\cos\alpha} - 2gR(1+\cos\alpha),$$

в последнем равенстве мы учли соотношение (2). Таким образом, условие (3) того, что предмет “доскользил” до точки B, записывается в виде

$$\frac{4gR}{\cos\alpha} - 2gR(1+\cos\alpha) \geqslant gR \qquad \Rightarrow \qquad 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 4 \leqslant 0. \tag{4}$$

Здесь мы учли, что по условию задачи $\cos\alpha > 0$. Решая неравенство, получаем условие

$$0 < \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{41}-3}{4}. \tag{5}$$

Нам осталось проверить, что при движении по параболе предмет не ударяется о потолок туннеля. Из симметрии туннеля и траектории предмета относительно вертикальной оси OB следует, что необходимо и достаточно сравнить высоту туннеля $R(1+\cos\alpha)$ с высотой полета h, т. е. y-координатой вершины параболы. Как уже было показано, время полета равно $V_0\sin\alpha/g$, так что для нахождения h можно подставить половину этого значения в аргумент функции $y(t)$ в (1). Получаем

$$h = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{8g} = \frac{R\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}. \tag{6}$$

Здесь мы использовали выражение (2). В результате мы приходим к условию

$$\frac{R\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} \leqslant R(1+\cos\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad 3\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 \geqslant 0. \tag{7}$$

Решая данное неравенство, получаем

$$\cos\alpha \geqslant \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Теперь нужно найти пересечение условий (5) и (8):

$$\frac{1}{3} \leqslant \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{41}-3}{4}. \tag{9}$$

Ответ: Это возможно, если

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right) \leqslant \alpha \leqslant \arccos\frac{1}{3},$$

т. е. $31{,}7^\circ \leqslant \alpha \leqslant 70{,}5^\circ$.

Задача 2.

Разберемся сперва, как располагается резинка в положении равновесия. Полная сила, действующая на любой ее малый кусочек, должна быть равна нулю. Рассмотрим такой кусочек вблизи перегиба резинки через ребро каркаса, см. Рис. 3. Пусть T обозначает силу натяжения в резинке, N — силу нормальной реакции, F — силу трения, а углы β_1 и β_2 указывают, в каких направлениях остальная часть резинки тянет рассматриваемый кусочек. Второй закон Ньютона в проекции на оси перпендикулярную и параллельную опоре имеет вид

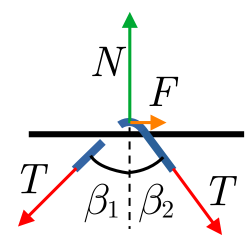

Рис. 3:

$$N = T(\sin\beta_1 + \sin\beta_2)\,, \tag{10}$$
$$F = T(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)\,. \tag{11}$$

Из уравнения (10) следует, что силы N и T — это величины одного порядка. В состоянии покоя $|F| \leqslant \mu N$, где μ — коэффициент трения. По условию, $\mu \ll 1$. Таким образом, из уравнения (11) ясно, что $|\cos\beta_1 - \cos\beta_2| \ll 1$ или, иначе говоря, $\beta_1 \approx \beta_2$. Если бы трение полностью отсутствовало, то углы были бы в точности равны. В рассматриваемой задаче небольшое трение присутствует. Именно за его счет затухают колебания, возникающие при выведении системы из положения равновесия. Поскольку трение очень мало, при определении положения равновесия можно считать, что $\beta_1 = \beta_2$. Так как в положении равновесия система стремится к минимуму потенциальной энергии, то альтернативно можно искать положение равновесия, требуя, чтобы длина резинки была в этом состоянии минимальна. Ясно, что когда каркас имеет форму правильного треугольника, то точки перегиба делят ребра каркаса пополам. Это легко также понять из соображений симметрии.

Искомую выделившуюся энергию можно найти как разность потенциальных энергий, запасенных резинкой в момент отпускания, U_1, и в конечном состоянии, U_2. Рассчитаем сперва энергию U_1. Хорошо известно, что если отрезать половину резинки, то жесткость оставшегося куска по сравнению с исходной увеличится вдвое, поскольку потребуется в два раза больше усилий, чтобы растянуть эту часть на ту же самую величину. Когда резинку, натянутую на равносторонний треугольник, прижимают в точках перегиба, ее формально разделяют на три равных куска. Следовательно, жесткость каждого куска равна $3k$, а длина в нерастянутом состоянии $L_0/3$. На Рис. 4 показано положение резинки после изменения формы треугольника ABC, но до отпускания. Две ее части имеют длины $L/2$ (как и до изменения формы каркаса), а одна имеет длину $L\sin\alpha$. Таким образом,

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3k}{2}\left(L\sin\alpha - L_0/3\right)^2 + 2\frac{3k}{2}\left(L/2 - L_0/3\right)^2 \\ &= k\left(\frac{3L^2}{4}(2\sin^2\alpha + 1) - LL_0(\sin\alpha + 1) + \frac{L_0^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

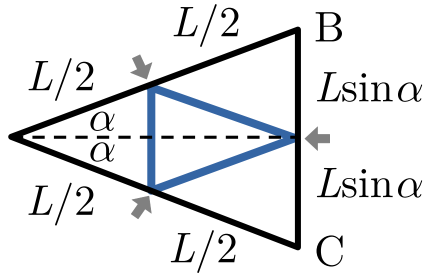

Рис. 4:

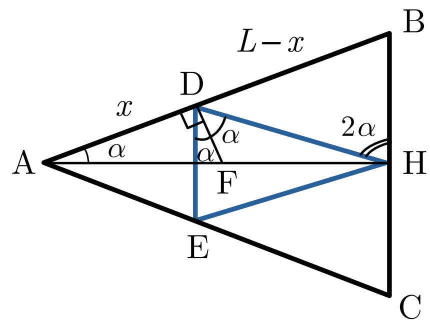

Рис. 5:

Найдем, какое положение займет резинка после отпускания, см. Рис. 5. Ясно, что она будет иметь форму равнобедренного треугольника DEH. Остается только определить положение точки D. Это можно сделать многими разными способами, в данном решении мы рассмотрим только один способ. Введем расстояние x, как показано на рисунке. Построим перпендикуляр DF к AB. Из проведенного выше рассуждения следует, что $\angle$EDF $=$ $\angle$FDH. Кроме того, так как DF перпендикулярно AB, а DE перпендикулярно AH, эти углы равны $\angle$BAH $= \alpha$. Заметим также, что $\angle$EDH $=$ $\angle$DHB как накрест лежащие. Применим теорему синусов для треугольника DBH:

$$\frac{|\mathrm{DB}|}{\sin\angle\mathrm{DHB}} = \frac{|\mathrm{BH}|}{\sin\angle\mathrm{BDH}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{L-x}{\sin 2\alpha} = \frac{L\sin\alpha}{\sin(\pi/2-\alpha)} \quad\Leftrightarrow\quad x = L\cos 2\alpha\,. \tag{13}$$

Периметр треугольника DEH равен

$$S = 2\left(x\sin\alpha + \sqrt{x^2\sin^2\alpha + (L-x)^2\cos^2\alpha}\right) = 4L\sin\alpha\cos^2\alpha\,. \tag{14}$$

Таким образом, энергия резинки в конечном состоянии равна

$$U_2 = \frac{k}{2}(S-L_0)^2 = k\left(8L^2\sin^2\alpha\cos^4\alpha - 4LL_0\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{L_0^2}{2}\right)\,. \tag{15}$$

Ответ: Выделившаяся энергия есть $U_1 - U_2$, где величины U_1 и U_2 заданы уравнениями (12) и (15) соответственно.

Задача 3.

В первую очередь заметим, что ребро BD можно выбросить, поскольку ток через амперметр A_1 не течет, так что потенциалы точек B и D совпадают. Перерисуем схему, данную в условии задачи, в более удобной “плоской” форме (см. Рис. 6). Обозначим токи так, как показано на рисунке. Очевидно, что имеет место соотношение $I_0 = I_1 + I_2$. Наша задача состоит в определении неизвестных I_2, R_1 и R_2. Запишем условие равенства потенциалов точек B и D. Пусть потенциал точки A равен φ_A. Тогда имеем

$$\varphi_\mathrm{B} = \varphi_\mathrm{A} - 2\mathcal{E} + 3I_1 r, \qquad \varphi_\mathrm{D} = \varphi_\mathrm{A} + \mathcal{E}. \tag{16}$$

Приравнивая потенциалы, легко находим, что $I_1 = \mathcal{E}/r$.

Чтобы записать следующее уравнение, воспользуемся вторым законом Кирхгофа, т. е. условием неизменности потенциала в результате обхода замкнутого контура. Для внешнего контура, включающего точки A и D, а также амперметр A_2, имеем

$$I_2R_2 + I_0 r = \mathcal{E}. \tag{17}$$

Подставляя $I_0 = I_1 + I_2$ и $I_1 = \mathcal{E}/r$, получаем уравнение

$$I_2(R_2 + r) = 0. \tag{18}$$

Отсюда мы приходим к выводу, что $I_2 = 0$, т. е. через амперметр A_2 ток не течет. Это означает, что величина сопротивления R_2 может быть произвольной, т. к. она не влияет на токи в схеме. Фактически мы имеем единственный контур ABCDA ($I_0 = I_1$), для которого можно записать

$$I_0(3r + R_1 + r) = \mathcal{E} + 2\mathcal{E} + 4\mathcal{E}. \tag{19}$$

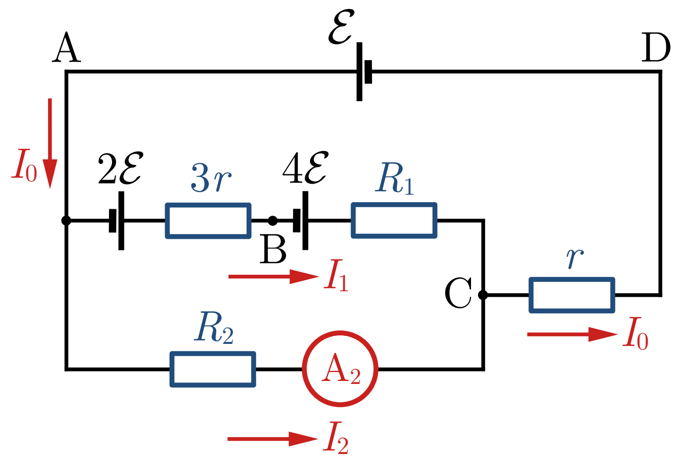

Рис. 6:

С учетом $I_0 = I_1 = \mathcal{E}/r$ находим $R_1 = 3r$.

Ответ: $R_1 = 3r$; сопротивление R_2 может быть любым; ток через амперметр A_2 равен нулю.

Задача 4.

Нагреватель, который оплачивает Митрофан, производит за сутки энергию, пропорциональную стоимости оплаты. Вся эта энергия утекает на улицу из-за теплопотерь, которые пропорциональны разности температур с двух сторон стены, это можно записать в виде $A_1 = \alpha(t_0 - t_y)$, где α — коэффициент пропорциональности, зависящий от того, насколько стены хорошо теплоизолируют помещение. Его несложно найти:

$$\alpha = \frac{A_1}{t_0 - t_y} = \frac{240}{40} = 6 \text{ у.е. (условных единиц).}$$

Когда комната утеплена, баланс энергий меняется. Обозначим температуру стены под утеплителем t_x. Все тепло, произведенное обогревателем, утекает в два этапа: сначала из комнаты к стене под утеплитель, затем — на улицу:

$$A_2 = \beta(t_0 - t_x) = \alpha(t_x - t_y).$$

Здесь мы учли, что теплоизоляционные свойства утеплителя характеризуются другим параметром, β, а также тот факт, что все тепло прошло и сквозь слой утеплителя, и сквозь стену. Из второго равенства легко найти

$$t_x = t_y + \frac{A_2}{\alpha} = 15\,^\circ\text{C}, \qquad \beta = \frac{A_2}{t_0 - t_x} = \frac{210}{5} = 42 \text{ у.е.}$$

В комнате Митрофана влажность 50%, это значит, что концентрация водяных паров в 2 раза меньше, чем максимальная при данной комнатной температуре t_0. Максимальную концентрацию при t_0 можно узнать из графика. Разделив ее пополам, выясняем, что в комнате обычно содержится примерно $2{,}9 \cdot 10^{23}$ молекул водяного пара на кубометр. Также из графика видно, что при температуре $t_p = 10\,^\circ$C это количество станет предельно допустимым. Иными словами, если воздух в комнате Митрофана охладить до температуры t_p, то вода перестанет вмещаться в этот воздух и начнет выпадать в виде капель. Если это будет происходить под утеплителем, у Митрофана отсыреют стены. Значит, температура стены под утеплителем не должна сравняться с t_p. Оценим этот критический случай.

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$A_3 = \gamma(t_0 - t_p) = \alpha(t_p - t_y).$$

Здесь вы обозначили через A_3 стоимость работы обогревателя в сутки в этом случае, γ — коэффициент, характеризующий утепление в случае, когда слой утеплителя стал критическим. Несложно найти A_3 и γ:

$$A_3 = \alpha(t_p - t_y) = 6 \cdot 30 = 180 \text{ руб/сут}, \qquad \gamma = \frac{A_3}{t_0 - t_p} = \frac{180}{10} = 18 \text{ у.е.}$$

Мы видим, что по сравнению с β параметр γ меньше в $42/18 \simeq 2{,}3$ раза. Значит теперь утеплитель в 2,3 раза хуже проводит тепло, значит, его толщина в 2,3 раза больше, чем в ситуации, когда температура стены была $15\,^\circ$C.

Ответ: Митрофану нельзя увеличивать толщину утеплителя больше, чем в 2,3 раза. При этом в лучшем случае он будет платить 180 рублей в сутки. На самом деле, так как температура в комнате и влажность, а также температура на улице могут меняться, даже меньший слой утеплителя может быть опасен.

Задача 5.

Построим изображение светящегося уголка KLM в системе двух линз при некотором значении F их фокусного расстояния. Лучи, прошедшие через одну линзу, не попадают на другую линзу, поэтому итоговое изображение можно получить, построив изображение для одной из линз и затем отразив его относительно прямой OC.

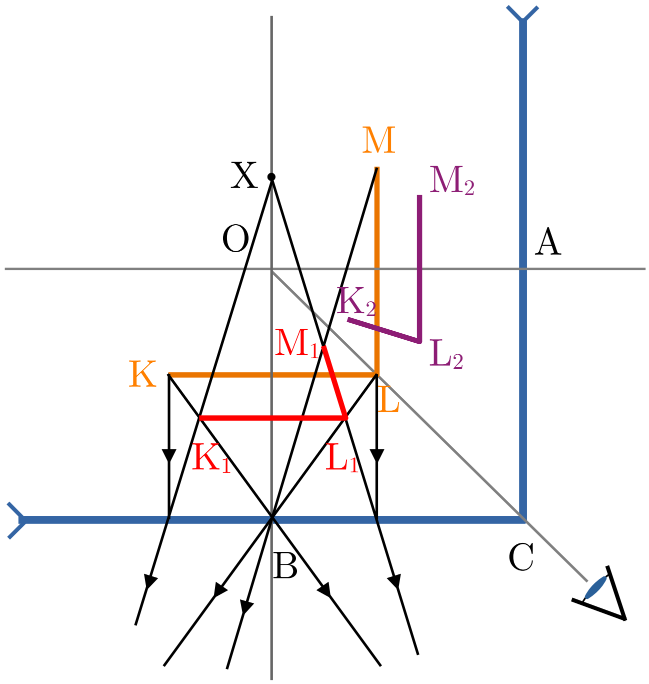

Рис. 7:

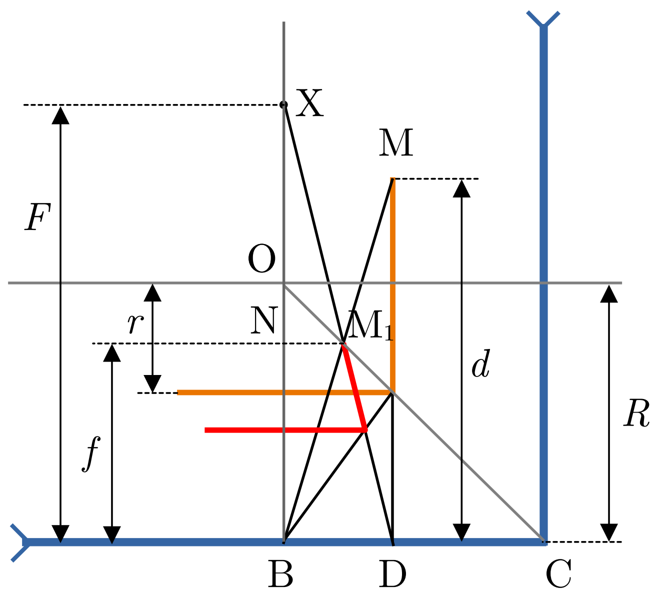

Рис. 8:

Построим изображение в линзе с центром в точке B. Предположим, что фокус этой линзы находится в точке X (см. Рис. 7). Как известно, рассеивающая линза всегда формирует мнимое изображение. При построении можно руководствоваться теми соображениями, что луч, пропущенный через центр линзы, не преломляется, а луч, идущий параллельно главной оптической оси, преломляется таким образом, что его продолжение проходит через фокус. Используя эти факты, легко получить, что изображение KLM в этой линзе представляет собой уголок $K_1L_1M_1$. Изображение в линзе с центром в точке A — уголок $K_2L_2M_2$.

Экспериментатор, находящийся на продолжении отрезка OC, видит оба изображения: $K_1L_1M_1$ и $K_2L_2M_2$. Если отрезки L_1M_1 и K_2L_2 не пересекаются (как это имеет место на Рис. 7), то экспериментатор видит две полоски света, между которыми расположен "темный" зазор. Легко сообразить, что изображения "сливаются" для экспериментатора в одну линию тогда, когда точки M_1 и K_2 оказываются на линии зрения OC.

На Рис. 8 изображена именно такая пограничная ситуация. Чтобы не загромождать чертеж, изображение в линзе с центром A опущено. Все точки и размеры, необходимые для дальнейшего рассмотрения, указаны на Рис. 8. Найдем искомое фокусное расстояние F.

Точка M_1 является мнимым изображением точки M. Расстояние от точки M до линзы равно $d \equiv R + r$. Воспользуемся формулой тонкой линзы (так как линза рассеивающая, а изображение мнимое, перед $1/F$ и $1/f$ стоят знаки минус):

$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \frac{Fd}{F+d} = \frac{F(R+r)}{F+R+r}\,. \tag{20}$$

Заметим, что треугольники $\mathrm{XNM_1}$ и XBD подобны, поэтому

$$\frac{|\mathrm{XN}|}{|\mathrm{XB}|} = \frac{|\mathrm{NM_1}|}{|\mathrm{BD}|}. \tag{21}$$

Поскольку треугольник $\mathrm{ONM_1}$ равнобедренный, то $|\mathrm{NM_1}| = |\mathrm{ON}| = R - f$. Кроме того, $|\mathrm{BD}| = r$, $|\mathrm{XN}| = F - f$, а $|\mathrm{XB}| = F$. Объединяя все вместе, с учетом (20) получаем

$$\frac{F - f}{F} = \frac{R - f}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{R(R + r)}{2r}\,. \tag{22}$$

Ответ: Минимальное фокусное расстояние, при котором экспериментатор видит изображение уголка KLM как одну непрерывную полоску света, составляет $R(R + r)/(2r)$.