Районный тур 2022/23 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант. Найдём энергию вылета снаряда при первом выстреле и свяжем её с параметрами резиновой ленты.

Очевидно, в момент выстрела потенциальная энергия, которая была запасена в двух половинках растянутой резинки, целиком перешла в кинетическую энергию снаряда. Действительно, по условию массой резиновой ленты можно пренебречь, а значит кинетическую энергию резины можно не рассматривать. Другие механизмы «утечки» механической энергии в тепло также невозможны из условия.

В первом выстреле резиновая лента растянулась на величину $(2Y-2L)$, а значит, запасла энергию

$$E_A = \frac{k(2Y-2L)^2}{2} = 2k(Y-L)^2. \tag{1}$$

Обратите внимание, что если мы скажем, что каждая **половинка** ленты растянулась на $(Y-L)$ и запасла энергию $k(Y-L)^2/2$, а потом сложим эти две энергии, мы ошибёмся в два раза. Дело в том, что жёсткость – характеристика, которая зависит от длины недеформированного куска резиновой ленты. Жесткость k' половины ленты в два раза **больше**, чем жёсткость k всей ленты из того же материала. Действительно, под действием той же нагрузки mg половина ленты растягивается в два раза меньше, чем целая лента, см. рисунок. А значит $k'\Delta x/2 = mg = k\Delta x$, поэтому $k' = 2k$.

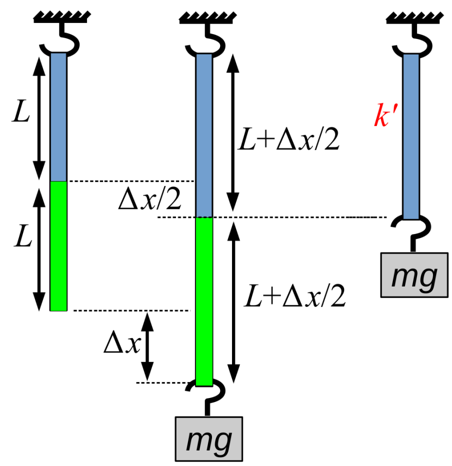

Рис. 1: Жёсткость удваивается, если резиновую ленту укоротить в 2 раза

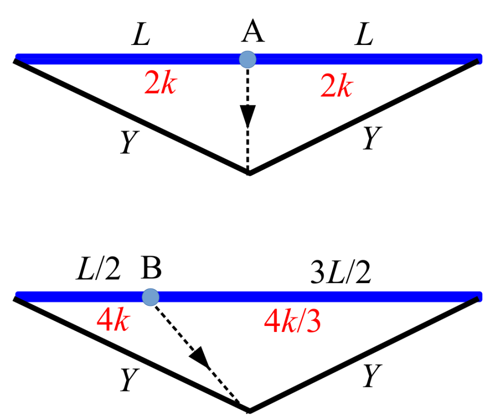

Рис. 2: Жёсткость (красным) отрезков ленты в первом и втором выстреле

Итак, если мы хотим рассматривать куски ленты отдельно, каждому куску мы должны приписать жёсткость $k' = k/d$, где d – число, показывающее какую часть ленты мы выделили для рассмотрения. В первом выстреле лента естественным образом делится пополам, то есть $d = 1/2$, $k' = 2k$. В таком подходе рассмотрение потенциальной энергии двух половинок резинки с жёсткостями $2k$ и удлинением $Y-L$ каждая, приводит к ответу (1).

Теперь, когда мы разобрались с первым выстрелом, легко понять, что будет со вторым. Следует мысленно разделить резиновую ленту на два куска. Один, с недеформированной длиной $L/2$ (четверть всей ленты $2L$), с жёсткостью $4k$, и второй длиной $3L/2$ с жёсткостью $4k/3$ (в данном случае отрезок ленты составляет $d = 3/4$ исходной длины, значит, его жёсткость в 4/3 больше исходной). Каждый из этих кусов растянулся до длины Y. Изменение длины одного куска при этом $Y - L/2$, изменение длины второго $Y - 3L/2$, а суммарная потенциальная энергия упругой деформации

$$E_B = \frac{4k(Y-L/2)^2}{2} + \frac{4k}{3}\frac{(Y-3L/2)^2}{2} \tag{2}$$

совпадает кинетической энергией второго выстрела.

Вычитая из выражения (2) выражение (1), раскрывая скобки, находим разницу энергий снарядов:

$$E_B - E_A = 2kY^2/3$$

Ответ: Энергия вылета снаряда увеличилась на $E_B - E_A = 2kY^2/3$.

Задача 2. I вариант. Рассмотрим «малый» процесс, в ходе которого P, V, T газа, а также его внутренняя энергия U изменяются на малые величины ΔP, ΔV, ΔT и ΔU. Будем считать, что в ходе процесса газ получил малую теплоту δQ и совершил над какими-то внешними силами работу δA

Теплоёмкость – величина, равная отношению $\delta Q/\Delta T$. Из первого начала термодинамики следует, что теплота δQ, полученная термодинамической системой, «тратится» либо на увеличение внутренней энергии газа U (молекулы начинают двигаться быстрее), либо превращается в работу:

$$\delta Q = \Delta U + \delta A.$$

Используем, что кислород – двухатомный газ, поэтому $U = 5\nu RT/2$, и при постоянном количестве газа $\Delta U = 5\nu R\Delta T/2$. Используем, что в «малых» процессах работа газа $\delta A = P\Delta V$. Поэтому

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\delta A}{\Delta T} = \frac{5\nu R\Delta T}{2\Delta T} + \frac{P\Delta V}{\Delta T} = \frac{5\nu R}{2} + \frac{P\Delta V}{\Delta T}. \tag{3}$$

Осталось выяснить, чему в рассматриваемом процессе равно отношение $\Delta V/\Delta T$. Очевидно, если бы мы знали зависимость $V(T)$, искомое отношение вычислялось бы как производная этой зависимости, ведь величины ΔV и ΔT малы:

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V(T+\Delta T) - V(T)}{\Delta T} = \frac{dV}{dT}.$$

В рассматриваемом процессе кроме уравнения Клапейрона-Менделеева $PV = \nu RT$ выполняется ещё и $P = \alpha V$, где α – некоторый постоянный коэффициент. Поэтому мы можем исключить из этой пары уравнений давление и найти, что

$$\alpha V^2 = \nu RT \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{\nu RT}{\alpha}}, \qquad \frac{dV}{dT} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}}.$$

Подставляя найденную производную в (3), получим

$$C = \frac{5\nu R}{2} + P\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}}$$

Снова исключим отсюда давление, использовав $P = \alpha V = \alpha\sqrt{\nu RT/\alpha}$:

$$C = \frac{5\nu R}{2} + \alpha\sqrt{\frac{\nu RT}{\alpha}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}} = \frac{5\nu R}{2} + \frac{\nu R}{2} = 3\nu R.$$

Ответ: В данном процессе теплоёмкость газа равна $3\nu R$.

Задача 3. I вариант. Обозначим через S поперечную площадь стержня. Тогда его электрическое сопротивление $R = \rho_э L/S$.

Под действием приложенного напряжения через стержень потечёт ток $I = U/R = US/(\rho_э L)$. При включении магнитного поля это приведёт к появлению силы Ампера

$$F_A = IB_0L = USB_0/\rho_э.$$

Эта сила по «правилу левой руки» перпендикулярна одновременно и стержню, и направлению вектора B_0.

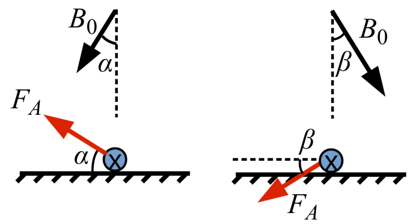

Рис. 3: Направление силы Ампера в двух случаях

Пока поле не включили, сила реакции стола N равна весу стержня $mg = \rho LSg$. Пусть в результате включения поля вес *уменьшился* в два раза. При этом и сила реакции стола должна уменьшииться. Для этого (см. левый рисунок 3: провод изображён «с торца», ток по нему мы изобразили, направленным «за рисунок»), вертикальная компонента силы Ампера, равная $F_A \sin\alpha$, должна компенсировать половину веса:

$$F_A \sin\alpha = \frac{mg}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{USB_0 \sin\alpha}{\rho_э} = \frac{\rho LSg}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{\rho\rho_э Lg}{2UB_0}.$$

Ответ удобно представить в виде

$$\sin\alpha = \frac{B_{кр}}{B_0}, \qquad \text{где } B_{кр} = \frac{\rho\rho_э Lg}{2U}.$$

Действительно, тогда легко заметить, что решение существует лишь если $B_0 \geq B_{кр}$, ведь синус – величина, которая не может быть больше единицы.

Кроме того сила Ампера имеет горизонтальную составляющую $F_A \cos\alpha$. Чтобы стержень не поехал по столу, нужно, чтобы $F_A \cos\alpha \leq \mu N$. Однако теперь поле включено, и вес стержня вместе с силой реакции стола N уменьшились вдвое, то есть теперь $N = mg/2$.

Используем условие для вертикальной компоненты силы Ампера $F_A \sin\alpha = mg/2$, откуда

$$F_A \cos\alpha = F_A \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg}\alpha.$$

Значит, из условия неподвижности стержня

$$F_A \cos\alpha \leq \mu N \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mg}{2} \operatorname{ctg}\alpha \leq \mu \frac{mg}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq \operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

Чтобы вес стержня при включении поля стал *в два раза больше*, вертикальная компонента силы Ампера должна быть направлена вниз и быть равной mg. При подходящем угле β (см. правый рис. 3)

$$F_A \sin\beta = mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{USB_0 \sin\beta}{\rho_э} = \rho LSg \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = \frac{2B_{кр}}{B_0}.$$

Это решение существует лишь если $B_0 \geq 2B_{кр}$.

Сила Ампера снова имеет горизонтальную составляющую $F_A \cos\beta$. Чтобы стержень не поехал по столу, она не должна превосходить μN, но теперь, как и вес, $N = 2mg$.

Используем $F_A \sin\beta = mg$, откуда $F_A \cos\beta = F_A \sin\beta \operatorname{ctg}\beta = mg \operatorname{ctg}\beta$, значит, условие неподвижности стержня

$$F_A \cos\beta \leq \mu N \qquad \Rightarrow \qquad mg \operatorname{ctg}\beta \leq 2\mu mg \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2}. \tag{5}$$

<u>Ответ</u>: Существует три варианта:

- При $B_0 < B_{кр} = \rho\rho_э Lg/(2U)$ решения нет – поле слишком слабое, чтобы изменить вес в два раза.

- При $B_{\text{кр}} \le B < 2B_{\text{кр}}$ поле нужно включить под углом α к вертикали, $\alpha = \arcsin\left(B_{\text{кр}}/B_0\right)$. Чтобы стержень при этом не поехал по столу, должно выполняться условие $\mu \ge \operatorname{ctg}\alpha$.

- При $B \ge 2B_{\text{кр}}$ появляется второе решение – поле также можно направить под углом β к вертикали $\beta = \arcsin(2B_{\text{кр}}/B_0)$. Чтобы стержень не поехал по столу, должно выполняться условие $\mu \ge (\operatorname{ctg}\beta)/2$.

Задача 4. I вариант.

Обозначим U – напряжение источника. Очевидно, общая ёмкость конденсаторов выражается через C_1, C_2 по формуле

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{6}$$

Первоначально заряды на пластинах конденсатора расположатся, как показано на рисунке 4, слева. При этом $q = C_0 U$. Когда замкнули левый ключ, заряды перераспределились: левый конденсатор разряжен (см. рис. 4, справа).

При этом $q' = C_2 U$, а через сопротивление должен протечь заряд

$$Q_{\text{чип}} = q' - q = C_2 U - C_0 U. \tag{7}$$

Аналогично рассуждая, получим, что когда замкнули правый ключ, через сопротивление протёк заряд

$$Q_{\text{дип}} = C_1 U - C_0 U.$$

Разделив второе равенство на первое получим по условию 100:

$$\frac{Q_{\text{дип}}}{Q_{\text{чип}}} = \frac{C_1 - C_0}{C_2 - C_0} = 100.$$

Подставляя сюда выражение (6), получим

$$\frac{C_1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}{C_2 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} = 100 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C_1^2}{C_2^2} = 100$$

$$C_1 = 10 C_2.$$

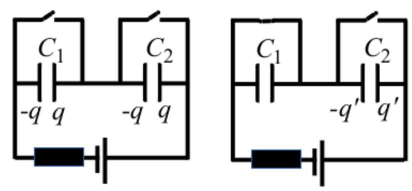

Рис. 4: Распределение зарядов до и после замыкания левого ключа

Подставив это соотношение в (6)

$$10\ \text{мкФ} = \frac{10 C_2^2}{10 C_2 + C_2} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 11\ \text{мкФ}, \quad C_1 = 110\ \text{мкФ}.$$

Из равенства (7) найдём напряжение источника $U = Q_{\text{чип}}/(C_2 - C_0) = 36$ В

<u>Ответ</u>: $C_1 = 110$ мкФ, $C_2 = 11$ мкФ, $U = 36$ В

Задача 5. I вариант. Рассмотрим процесс таяния льда. Скорость этого процесса пропорциональна мощности потока тепла от стола ко льду. По условию эта мощность W пропорциональна площади соприкосновения, которая постепенно убывает: $W(t) = \alpha S(t)$.

Рассмотрим малый промежуток времени Δt, в течение которого площадь соприкосновения была равна S. Будем считать Δt достаточно малым, чтобы изменением S можно было пренебречь по сравнению с самой величиной S.

За время Δt лёд получил от стола теплоту $W\Delta t = \alpha S \Delta t$. Пусть за этот промежуток времени растаял тонкий слой льда Δh. Его объём вычисляется по формуле объёма цилиндра $S\Delta h$, а масса $\Delta m = \rho S \Delta h$ – через этот объём с помощью плотности льда ρ.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\alpha S \Delta t = \lambda \Delta m \qquad \Rightarrow \qquad \alpha S \Delta t = \lambda \rho S \Delta h \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\lambda \rho},$$

где λ – удельная теплота плавления льда. Последнее равенство означает, что высота льда над столом уменьшается равномерно – скорость уменьшения высоты – величина $\Delta h/\Delta t$ – постоянна.

Найдём точку на столе, в которую попадает луч в самый первый момент $t = 0$. Рассмотрим рисунок 5. Из условия легко найти, что угол падения луча на полушарие $\alpha = 30°$, то есть $\sin\alpha = 1/2$.

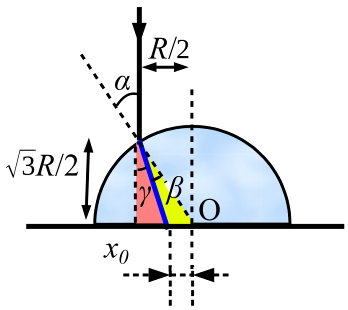

Рис. 5:

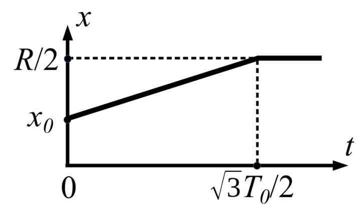

Рис. 6:

По закону преломления Снеллиуса

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{2n}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

Из розового треугольника с углом γ на рисунке 5 легко найти его горизонтальный катет $(R\sqrt{3}/2)\operatorname{tg}\gamma$, а значит, точку падения луча на стол: она расположена на расстоянии x_0 от центра полушария O:

$$x_0 = \frac{R}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\gamma, \qquad \text{где } \gamma = \alpha - \beta.$$

Несложно вычислить $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4n^2-1}}} = \frac{\sqrt{4n^2-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{12n^2-3}+1}.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{12n^2-3}-3}{\sqrt{12n^2-3}+1}\right) = \frac{2R}{\sqrt{12n^2-3}+1}. \tag{8}$$

Это точка на столе, куда луч попадёт в самом начале. В самом конце, когда весь лёд растает, луч, очевидно, попадёт на стол в точку, находящуюся на расстоянии $R/2$ от точки O. Впервые это произойдёт, когда нижняя часть льда толщиной $R\sqrt{3}/2$ растает. Так как вся полусфера имеет толщину R и тает за время T_0, причём таяние равномерно уменьшает толщину, это произойдёт в момент $T_0\sqrt{3}/2$.

Чтобы понять, как ведёт себя график $x(t)$, представим себе, что не лёд опускается, а стол равномерно поднимается, «съедая» лёд слой за слоем. Очевидно, что каждый раз стол будет пересекать лазерный луч в точках, изображённых синим отрезком. Так как точка пересечения поднимается равномерно, во время таяния льда график $x(t)$ будет представлять собой прямую.

Ответ: При $t \in [0, \sqrt{3}T_0/2]$ зависимость линейна

$$x(t) = x_0 + t\frac{(R/2 - x_0)}{\sqrt{3}T_0/2}.$$

При $t > \sqrt{3}T_0/2$ оказывается $x(t) = R/2$. График этой зависимости см. на рисунке 6. Величина x_0 приведена в (8)

Районный тур 2022/23 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. II вариант. Обозначим жёсткость резиновой ленты k и свяжем её с энергией вылета снаряда.

Очевидно, в момент выстрела потенциальная энергия, которая была запасена в двух половинках растянутой резинки, целиком перешла в кинетическую энергию снаряда. Действительно, по условию массой резиновой ленты можно пренебречь, а значит кинетическую энергию резины можно не рассматривать. Другие механизмы «утечки» механической энергии в тепло также невозможны из условия.

В первом выстреле резиновая лента растянулась на величину $(2Y-2L)$, а значит, запасла энергию

$$E_A = \frac{k(2Y-2L)^2}{2} = 2k(Y-L)^2. \tag{9}$$

Обратите внимание, что если мы скажем, что каждая **половинка** ленты растянулась на $(Y-L)$ и запасла энергию $k(Y-L)^2/2$, а потом сложим эти две энергии, мы ошибёмся в два раза. Дело в том, что жёсткость – характеристика, которая зависит от длины недеформированнго куска резиновой ленты. Жесткость k' половины ленты в два раза **больше**, чем жёсткость k всей ленты из того же материала. Действительно, под действием той же нагрузки mg половина ленты растягивается в два раза меньше, чем целая лента, см. рисунок. А значит $k'\Delta x/2 = mg = k\Delta x$, поэтому $k' = 2k$.

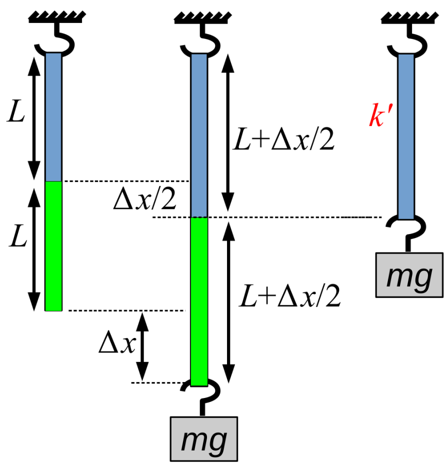

Рис. 7: Жёсткость удваивается, если резиновую ленту укоротить в 2 раза

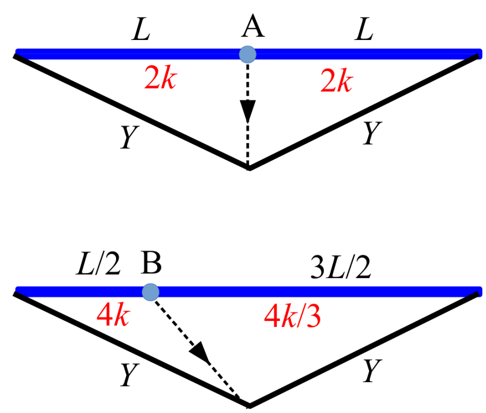

Рис. 8: Жёсткость (красным) отрезков ленты в первом и втором выстреле

Итак, если мы хотим рассматривать куски ленты отдельно, каждому куску мы должны приписать жёсткость $k' = k/d$, где d – число, показывающее какую часть ленты мы выделили для рассмотрения. В первом выстреле лента естественным образом делится пополам, то есть $d = 1/2$, $k' = 2k$. В таком подходе рассмотрение потенциальной энергии двух половинок резинки с жёсткостями $2k$ и удлинением $Y-L$ каждая, приводит к ответу (9).

Теперь, когда мы разобрались с первым выстрелом, легко понять, что будет со вторым. Следует мысленно разделить резиновую ленту на два куска. Один, с недеформированной длиной $L/2$ (четверть всей ленты $2L$), с жёсткостью $4k$, и второй длиной $3L/2$ с жёсткостью $4k/3$ (в данном случае отрезок ленты составляет $d = 3/4$ исходной длины, значит, его жёсткость в $4/3$ больше исходной). Каждый из этих кусов растянулся до длины Y. Изменение длины одного куска при этом $Y - L/2$, изменение длины второго $Y - 3L/2$, а суммарная потенциальная энергия упругой деформации

$$E_B = \frac{4k(Y - L/2)^2}{2} + \frac{4k}{3}\frac{(Y - 3L/2)^2}{2} \tag{10}$$

совпадает кинетической энергией второго выстрела.

Вычитая из выражения (10) выражение (9), раскрывая скобки, находим разницу энергий снарядов:

$$\Delta E = E_B - E_A = 2kY^2/3,$$

откуда немедленно выражаем k.

Ответ: Жёсткость резиновой ленты$k = 3\Delta E/(2Y^2)$.

Задача 2. II вариант. Рассмотрим «малый» процесс, в ходе которого P, V, T газа, а также его внутренняя энергия U изменяются на малые величины ΔP, ΔV, ΔT и ΔU. Будем считать, что в ходе процесса газ получил малую теплоту δQ и совершил над какими-то внешними силами работу δA

Теплоёмкость – величина, равная отношению $\delta Q/\Delta T$. Из первого начала термодинамики следует, что теплота δQ, полученная термодинамической системой, «тратится» либо на увеличение внутренней энергии газа U (молекулы начинают двигаться быстрее), либо превращается в работу:

$$\delta Q = \Delta U + \delta A.$$

Используем, что азот – двухатомный газ, поэтому $U = 5\nu RT/2$, и при постоянном количестве газа $\Delta U = 5\nu R\Delta T/2$. Используем, что в «малых» процессах работа газа $\delta A = P\Delta V$. Поэтому

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\delta A}{\Delta T} = \frac{5\nu R\Delta T}{2\Delta T} + \frac{P\Delta V}{\Delta T} = \frac{5\nu R}{2} + \frac{P\Delta V}{\Delta T}. \tag{11}$$

Осталось выяснить, чему в рассматриваемом процессе равно отношение $\Delta V/\Delta T$. Очевидно, если бы мы знали зависимость $V(T)$, искомое отношение вычислялось бы как производная этой зависимости, ведь величины ΔV и ΔT малы:

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V(T + \Delta T) - V(T)}{\Delta T} = \frac{dV}{dT}.$$

В рассматриваемом процессе кроме уравнения Клапейрона-Менделеева $PV = \nu RT$ выполняется ещё и $P = \alpha V$, где α – некоторый постоянный коэффициент. Поэтому мы можем исключить из этой пары уравнений давление и найти, что

$$\alpha V^2 = \nu RT \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{\nu RT}{\alpha}}, \qquad \frac{dV}{dT} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}}.$$

Подставляя найденную производную в (11), получим

$$C = \frac{5\nu R}{2} + P\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}}$$

Снова исключим отсюда давление, использовав $P = \alpha V = \alpha\sqrt{\nu RT/\alpha}$:

$$C = \frac{5\nu R}{2} + \alpha\sqrt{\frac{\nu RT}{\alpha}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha T}} = \frac{5\nu R}{2} + \frac{\nu R}{2} = 3\nu R.$$

Ответ: В данном процессе теплоёмкость газа равна $3\nu R$.

Задача 3. II вариант. Обозначим через S поперечную площадь стержня. Тогда его электрическое сопротивление $R = \rho_э L/S$.

Под действием приложенного напряжения через стержень потечёт ток $I = U/R = US/(\rho_э L)$. При включении магнитного поля это приведёт к появлению силы Ампера

$$F_A = IB_0L = USB_0/\rho_э.$$

Эта сила по «правилу левой руки» перпендикулярна одновременно и стержню, и направлению вектора B_0.

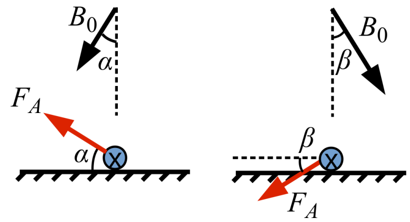

Рис. 9: Направление силы Ампера в двух случаях

Пока поле не включили, сила реакции стола N равна весу стержня $mg = \rho LSg$. Пусть в результате включения поля вес *уменьшился* в три раза. При этом и сила реакции стола должна уменьшииться. Для этого (см. левый рисунок 9: провод изображён «с торца», ток по нему мы изобразили, направленным «за рисунок»), вертикальная компонента силы Ампера, равная $F_A \sin\alpha$, должна компенсировать две трети веса:

$$F_A \sin\alpha = \frac{2mg}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{USB_0 \sin\alpha}{\rho_э} = \frac{2\rho LSg}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{2\rho\rho_э Lg}{3UB_0}.$$

Ответ удобно представить в виде

$$\sin\alpha = \frac{B_{кр}}{B_0}, \qquad \text{где } B_{кр} = \frac{2\rho\rho_э Lg}{3U}.$$

Действительно, тогда легко заметить, что решение существует лишь если $B_0 \geq B_{кр}$, ведь синус – величина, которая не может быть больше единицы.

Кроме того сила Ампера имеет горизонтальную составляющую $F_A \cos\alpha$. Чтобы стержень не поехал по столу, нужно, чтобы $F_A \cos\alpha \leq \mu N$. Однако теперь поле включено, и вес стержня вместе с силой реакции стола N уменьшились втрое, то есть теперь $N = mg/3$.

Используем условие для вертикальной компоненты силы Ампера $F_A \sin\alpha = 2mg/3$, откуда

$$F_A \cos\alpha = F_A \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2mg}{3} \operatorname{ctg}\alpha.$$

Значит, из условия неподвижности стержня

$$F_A \cos\alpha \leq \mu N \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2mg}{3} \operatorname{ctg}\alpha \leq \mu\frac{mg}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq 2\operatorname{ctg}\alpha. \tag{12}$$

Чтобы вес стержня при включении поля стал *в три раза больше*, вертикальная компонента силы Ампера должна быть направлена вниз и быть равной $2mg$ (см. правый рис. 9):

$$F_A \sin\beta = 2mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{USB_0 \sin\beta}{\rho_э} = 2\rho LSg \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = \frac{2\rho\rho_э Lg}{UB_0} = \frac{3B_{кр}}{B_0}.$$

Это решение существует лишь если $B_0 \geq 3B_{кр}$.

Сила Ампера снова имеет горизонтальную составляющую $F_A \cos\beta$. Чтобы стержень не поехал по столу, она не должна превосходить μN, но теперь, как и вес, $N = 3mg$.

Используем $F_A \sin\beta = 2mg$, откуда $F_A \cos\beta = F_A \sin\beta \operatorname{ctg}\beta = 2mg \operatorname{ctg}\beta$, значит, условие неподвижности стержня

$$F_A \cos\beta \leq \mu N \qquad \Rightarrow \qquad 2mg \operatorname{ctg}\beta \leq 3\mu mg \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq \frac{2\operatorname{ctg}\beta}{3}. \tag{13}$$

Ответ: Существует три варианта:

- При $B_0 < B_{кр} = 2\rho\rho_э Lg/(3U)$ решения нет – поле слишком слабое, чтобы изменить вес в три раза.

- При $B_{\text{кр}} \leq B < 3B_{\text{кр}}$ поле нужно включить под углом α к вертикали, $\alpha = \arcsin(B_{\text{кр}}/B_0)$. Чтобы стержень при этом не поехал по столу, должно выполняться условие $\mu \geq 2\operatorname{ctg}\alpha$.

- При $B \geq 3B_{\text{кр}}$ появляется второе решение – поле также можно направить под углом β к вертикали $\beta = \arcsin(3B_{\text{кр}}/B_0)$. Чтобы стержень не поехал по столу, должно выполняться условие $\mu \geq (2\operatorname{ctg}\beta)/3$.

Задача 4. II вариант. Обозначим U – напряжение источника. Очевидно, общая ёмкость конденсаторов выражается через C_1, C_2 по формуле

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{14}$$

Первоначально заряды на пластинах конденсатора расположатся, как показано на рисунке 10, слева. При этом $q = C_0 U$. Когда замкнули левый ключ, заряды перераспределились: левый конденсатор разряжен (см. рис. 10, справа)..

При этом $q' = C_2 U$, а через сопротивление должен протечь заряд

$$Q_{\text{чип}} = q' - q = C_2 U - C_0 U. \tag{15}$$

Аналогично рассуждая, получим, что когда замкнули правый ключ, через сопротивление протёк заряд

$$Q_{\text{дип}} = C_1 U - C_0 U.$$

Разделив второе равенство на первое получим по условию 400:

$$\frac{Q_{\text{дип}}}{Q_{\text{чип}}} = \frac{C_1 - C_0}{C_2 - C_0} = 400.$$

Подставляя сюда выражение (14), получим

$$\frac{C_1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}{C_2 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} = 400 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C_1^2}{C_2^2} = 400$$

$$C_1 = 20 C_2.$$

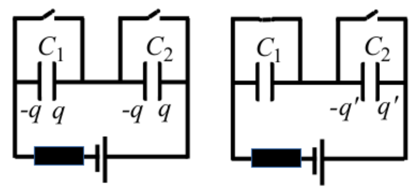

Рис. 10: Распределение зарядов до и после замыкания левого ключа

Подставив это соотношение в (14)

$$2 \text{ мкФ} = \frac{20 C_2^2}{20 C_2 + C_2} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 2,1 \text{ мкФ}, \quad C_1 = 42 \text{ мкФ}.$$

Из равенства (15) найдём напряжение источника $U = Q_{\text{чип}}/(C_2 - C_0) = 36$ В

<u>Ответ</u>: $C_1 = 42$ мкФ, $C_2 = 2,1$ мкФ, $U = 36$ В

Задача 5. II вариант. Рассмотрим процесс таяния льда. Скорость этого процесса пропорциональна мощности потока тепла от стола ко льду. По условию эта мощность W пропорциональна площади соприкосновения, которая постепенно убывает: $W(t) = \alpha S(t)$.

Рассмотрим малый промежуток времени Δt, в течение которого площадь соприкосновения была равна S. Будем считать Δt достаточно малым, чтобы изменением S можно было пренебречь по сравнению с самой величиной S.

За время Δt лёд получил от стола теплоту $W\Delta t = \alpha S \Delta t$. Пусть за этот промежуток времени растаял тонкий слой льда Δh. Его объём вычисляется по формуле объёма цилиндра $S\Delta h$, а масса $\Delta m = \rho S \Delta h$ – через этот объём с помощью плотности льда ρ.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\alpha S \Delta t = \lambda \Delta m \qquad \Rightarrow \qquad \alpha S \Delta t = \lambda \rho S \Delta h \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\lambda \rho},$$

где λ – удельная теплота плавления льда. Последнее равенство означает, что высота льда над столом уменьшается равномерно – скорость уменьшения высоты – величина $\Delta h/\Delta t$ – постоянна.

Найдём точку на столе, в которую попадает луч в самый первый момент $t = 0$. Рассмотрим рисунок 11. Из условия легко найти, что угол падения луча на полушарие $\alpha = 45°$, то есть $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$.

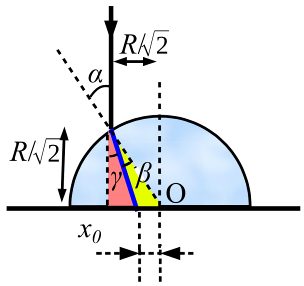

Рис. 11:

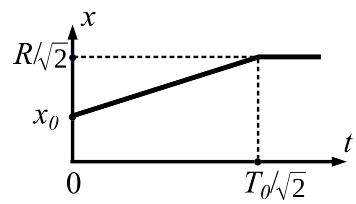

Рис. 12:

По закону преломления Снеллиуса

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}n}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}.$$

Из розового треугольника с углом γ на рисунке 11 легко найти его горизонтальный катет $(R/\sqrt{2})\operatorname{tg}\gamma$, а значит, точку падения луча на стол: она расположена на расстоянии x_0 от центра полушария O:

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\gamma, \qquad \text{где } \gamma = \alpha - \beta.$$

Несложно вычислить $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}} = \frac{\sqrt{2n^2-1}-1}{\sqrt{2n^2-1}+1}.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\sqrt{2n^2-1}-1}{\sqrt{2n^2-1}+1}\right) = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2n^2-1}+1}. \tag{16}$$

Это точка на столе, куда луч попадёт в самом начале. В самом конце, когда весь лёд растает, луч, очевидно, попадёт на стол в точку, находящуюся на расстоянии $R/\sqrt{2}$ от точки O. Впервые это произойдёт, когда нижняя часть льда толщиной $R/\sqrt{2}$ растает. Так как вся полусфера имеет толщину R и тает за время T_0, причём таяние равномерно уменьшает толщину, это произойдёт в момент $T_0/\sqrt{2}$.

Чтобы понять, как ведёт себя график $x(t)$, представим себе, что не лёд опускается, а стол равномерно поднимается, «съедая» лёд слой за слоем. Очевидно, что каждый раз стол будет пересекать лазерный луч в точках, изображённых синим отрезком. Так как точка пересечения поднимается равномерно, во время таяния льда график $x(t)$ будет представлять собой прямую.

Ответ: При $t \in [0, T_0/\sqrt{2}]$ зависимость линейна

$$x(t) = x_0 + t\frac{(R/\sqrt{2} - x_0)}{T_0/\sqrt{2}}.$$

При $t > T_0/\sqrt{2}$ оказывается $x(t) = R/\sqrt{2}$. График этой зависимости см. на рисунке 12. Величина x_0 приведена в (16)