Городской тур 2023/24. 11 класс

Задача 1. Так как предмет запустили вдоль стены в плоскости рисунка, его начальная скорость направлена под углом α к горизонту. Обозначим модуль его начальной скорости за V_0. Тело двигалось по дуге ABC без трения, поэтому к моменту удара о пол имеет ту же скорость V_0, направленную под углом α к горизонту (синяя стрелка на рис. 1). Сразу после удара предмет, имея скорость $V_0/2$ (красная стрелка) полетит под углом α к горизонту по параболе.

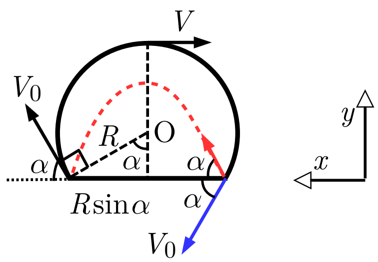

Рис. 1:

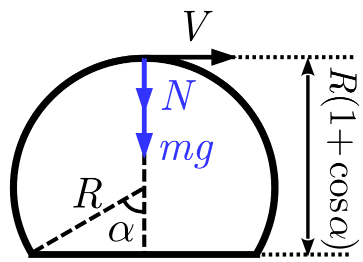

Рис. 2:

Дальность полёта при этом вычисляется из законов равноускоренного движения в поле силы тяжести:

$$x(t) = (V_0/2)\cos\alpha\, t, \qquad y(t) = (V_0/2)\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

При $y = 0$ из второго соотношения вычисляется время полёта $t = V_0 \sin\alpha/g$, в этот момент из первого соотношения $x = V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha/(2g)$. Понятно, что по условию дальность полёта должна совпадать с $2R\sin\alpha$, где R — радиус дуги окружности AOB (см. Рис. 1). Приравнивая, получаем

$$\frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2g} = 2R\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad V_0^2 = \frac{4gR}{\cos\alpha}. \tag{2}$$

Теперь учтём, что в верхней точке B траектории тело не отрывалось от поверхности туннеля. В этот момент сила реакции N, действующая со стороны туннеля на предмет, неотрицательна. Ситуации с отрицательной N соответствует физическая ситуация, когда предмет оторвался от стенки туннеля в процессе движения и, начав полёт по параболе, просто не доехал до точки B. Физически это означает, что начальная скорость V_0 недостаточна, чтобы преодолеть мёртвую петлю. По второму закону Ньютона при движении по окружности (см. рис. 2)

$$\frac{mV^2}{R} = mg + N, \quad N \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad V^2 \geq gR. \tag{3}$$

Скорость V в этот момент найдём по закону сохранения энергии:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgR(1+\cos\alpha) + \frac{mV^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = V_0^2 - 2gR(1+\cos\alpha) = \frac{4gR}{\cos\alpha} - 2gR(1+\cos\alpha),$$

в последнем равенстве мы учли соотношение (2). Таким образом, условие (3) того, что предмет “доскользил” до точки B, записывается в виде

$$\frac{4gR}{\cos\alpha} - 2gR(1+\cos\alpha) \geq gR, \qquad \Rightarrow \qquad 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 4 \leq 0.$$

Здесь мы учли, что по условию задачи $\cos\alpha > 0$. Решая неравенство, получаем условие

$$0 < \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{41}-3}{4}. \tag{4}$$

Нам осталось проверить, что при движении по параболе предмет не ударяется о потолок туннеля. Из симметрии туннеля и траектории предмета относительно вертикальной оси OB следует, что необходимо и достаточно сравнить высоту туннеля $R(1+\cos\alpha)$ с высотой полета h, т. е. y-координатой вершины параболы. Как уже было показано, время полёта равно $V_0 \sin\alpha/g$, так что для нахождения h можно подставить половину этого значения в аргумент функции $y(t)$ в (1). Получаем

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{8g} = \frac{R\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Здесь мы использовали выражение (2). В результате мы приходим к условию

$$\frac{R\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} \le R(1+\cos\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad 3\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 \ge 0.$$

Решая данное неравенство, получаем

$$\cos\alpha \ge \frac{1}{3}. \tag{5}$$

Теперь нужно найти пересечение условий (4) и (5):

$$\frac{1}{3} \le \cos\alpha \le \frac{\sqrt{41}-3}{4}.$$

Ответ: Это возможно, если

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right) \le \alpha \le \arccos\frac{1}{3},$$

т. е. $31{,}7^\circ \le \alpha \le 70{,}5^\circ$.

Задача 2. До тех пор, пока клапан не откроется, нагревание газа происходит в замкнутом объёме, система не совершает работу, поэтому условие теплового баланса за малый промежуток времени dt имеет вид

$$(W - \alpha(T - T_0))dt = dU,$$

где dU – изменение внутренней энергии системы за рассматриваемый промежуток времени. Отсюда выражаем скорость изменения внутренней энергии:

$$\frac{dU}{dt} = W - \alpha(T - T_0).$$

Такой зависимости соответсвует отрезок прямой на графике (см. рис. 3). Если бы в системе не было клапана, это был бы ответ на вопрос задачи, а температура системы менялась бы от T до $T_{\max}$, определяющейся из условия, что вся подводимая теплота успевает рассеяться в комнату

$$W = \alpha(T_{\max} - T_0) \qquad \Rightarrow \qquad T_{\max} = T_0 + W/\alpha.$$

Однако, по условию в некоторый момент клапан может открыться и газ начнёт покидать сосуд. Несложно найти температуру $T_{\text{кр}}$, при которой это произойдёт:

$$P_{\text{кр}}V = \nu_0 R T_{\text{кр}} \qquad \Rightarrow \qquad T_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}V}{\nu_0 R}.$$

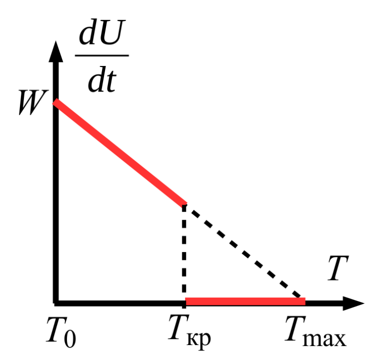

Рис. 3:

Если $T_{\text{кр}} \in (T_0, T_{\max})$, начиная с момента, когда температура в сосуде достигла $T_{\text{кр}}$ клапан будет открыт, а дальнейший нагрев газа до $T_{\max}$ не будет сопровождаться ростом давления в системе: при увеличении T количество вещества в сосуде ν будет убывать так, чтобы произведение νRT оставалось постоянным и равным $P_{\text{кр}}V$.

Внутренняя энергия газа в сосуде при этом равна

$$U = \frac{3\nu RT}{2} = \frac{3P_{\text{кр}}V}{2}.$$

Так как величины U теперь не меняется во времени, на промежутке $(T_{\text{кр}}V, T_{\max}V)$ величина $dU/dt = 0$.

Ответ: см. граифк на рис 3.

Задача 3. Обозначим заряд кольца Q, а заряд единицы длины стержня λ.

Кольцо находится в электрическом поле E, которое создаёт длинный стержень. При этом на кольцо действует электрическая сила $F = QE_x$, направленная вверх, по оси x, ведь по условию задачи мы знаем, что кольцо приподнимается.

Величину E_x, в принципе, можно найти с помощью интегрирования, однако мы поступим иначе. Обозначим через $\varphi(x)$ потенциал, который создаёт стержень около кольца, если расстояние между столом и нижним концом стержня x. Так как потенциал и напряжённость связаны между собой, можно записать

$$E_x = \frac{\varphi(x+dx) - \varphi(x)}{dx}. \tag{6}$$

Разность в числителе $\Phi \equiv \varphi(x+dx) - \varphi(x)$ можно рассмотреть как потенциал Φ, который создаёт вспомогательная система, состоящая из двух противоположно заряженных стержней, сдвинутых друг относительно друга на малое расстояние dx (см. рис. Синий и красный стержни, наложенные друг на друга, заряжены с зарядами λ и $-\lambda$). Это можно сделать благодаря принципу суперпозиции. Действительно, один стержень создаёт при этом потенциал, соответствующий $\varphi(x+dx)$, а другой $-\varphi(x)$.

Очевидно, заряды в такой системе «гасят» друг друга везде, кроме небольшого участка длиной dx. Выбрав dx достаточно малым, рассмотрим потенциал Φ оставшегося заряда λdx как точечный:

$$\Phi = \frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^2+R^2}},$$

здесь в знаменателе мы написали расстояние от заряда λdx до произвольной точки кольца.

Подставляя это в соотношение (6), получим

$$E_x = \frac{\Phi}{dx} = \frac{k\lambda}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

По условию задачи кольцо массой m начинает приподниматься, когда $x = 1,5R$, то есть при

$$F = QE_x = \frac{k\lambda Q}{\sqrt{(1,5R)^2+R^2}} = mg. \tag{7}$$

Максимальное значение силы F достигается при $x = 0$, этому соответствует приподнимание кольца массой M:

$$F = \frac{k\lambda Q}{\sqrt{R^2}} = Mg. \tag{8}$$

Разделив (8) на (7) получим

$$\frac{\sqrt{(1,5R)^2+R^2}}{\sqrt{R^2}} = \frac{M}{m} \qquad \Rightarrow \qquad M = m\sqrt{1+1,5^2}.$$

Ответ: Максимальная масса кольца $m\sqrt{3.25} \simeq 1,8m$.

Задача 4. Первоначально рамка покоится, через нее течёт ток $I_0 = U/R$. При этом на сторону рамки с сопротивлением R будет действовать сила Ампера, которая станет поворачивать «флажок» вокруг оси OO'.

Обозначим через ϕ угол, на который повернулась рамка в момент времени t. Запишем поток магнитного поля B через рамку в этот момент, а также скорость изменения потока:

$$\Phi = BaL\sin\phi(t), \qquad \frac{d\Phi}{dt} = BaL\frac{d\phi}{dt}\cos\phi.$$

Здесь мы ввели a – ширину рамки.

Так как магнитный поток изменяется, в рамке возникает ЭДС индукции, которая влияет на величину тока и силу Ампера:

$$F_{\text{ампера}} = IBL, \qquad I = \frac{U - d\Phi/dt}{R}.$$

Вдобавок следует учесть, что вращает флажок теперь лишь проекция силы Ампера, направленная вдоль текущего направления движения сопротивления в данный момент. Поэтому второй закон Ньютона имеет вид

$$Ma = F_{\text{ампера}}\cos\phi.$$

По условию ускорение обратилось в ноль. Это может произойти либо когда $\cos\phi = 0$ (но этот случай нам неинтересен, ведь по условию $\phi_0 \neq 90$), либо если обратился в ноль I:

$$I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U = \frac{d\Phi}{dt} = BaL\frac{d\phi}{dt}\cos\phi_0.$$

Отсюда найдём угловую скорость движения флажка в интересующий нас момент:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{U}{BaL\cos\phi_0},$$

а также скорость сопротивления

$$V = a\frac{d\phi}{dt} = \frac{U}{BL\cos\phi_0}.$$

Теперь и кинетическую энергию рамки несложно найти – она совпадает с кинетической энергией сопротивления:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{MU^2}{2B^2L^2\cos^2\phi_0}$$

Ответ: Кинетическая энергия рамки

$$\frac{MU^2}{2B^2L^2\cos^2\phi_0}.$$

Задача 5. На графике имеются минимумы, и области, где L настолько велика, что не попадает на рисунок. Разберёмся, как у линзы должен выглядеть такой график, где у него минимумы.

Пусть линза собирающая, $F > 0$.

Запишем формулу линзы (a – расстояние от центра линзы до источника, b – расстояние от центра линзы до изображения)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Предположим, что источник и изображение по разные стороны от линзы. Тогда $a > F$, $b > 0$

$$L = a + b = \frac{a^2}{a - F}.$$

В этом случае рассматриваемая функция стремится к бесконечности при a, стремящихся к F. На больших a она линейно возрастает и имеет минимум при $a = 2F$. Значение в минимуме $L(2F) = 4F$. Действительно, приравняем нулю производную $L(x)$:

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{2a(a - F) - a^2}{(a - F)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2F.$$

Корень $a = 0$ не соответствует условию $a > F$, поэтому здесь мы его не учитываем.

В случае $0 < a < F$ изображение становится мнимым и лежит с источником по одну сторону от линзы ($b < 0$). При этом расстояние между источником и линзой теперь $L = |a + b| = a^2/(F - a)$. Эта функция имеет минимум при $a = 0$, то есть когда предмет стремится к центру линзы. Отметим, что во всех остальных случаях $L \neq 0$.

Также несложно догадаться, что экспериментатор может помещать источник как с одной стороны от линзы, так и с другой (скажем, пусть этому соответствуют симметричные относительно линзы точки x_1 и x_2). При этом $L(x_1) = L(x_2)$, то есть график будет симметричен относительно центра линзы.

Изучая график, выданный к условию, замечаем, что при $x = 4,8$ величина L обращается в ноль, при этом график действительно симметричен относительно этой точки. Значит, там и находится центр линзы. Очевидно, эта ветвь графика соответствует мнимому изображению.

Вторая ветвь графика имеет минимум в точке $x = 7,6$, значение минимума $L = 5,6$. Как мы доказали, последнее соответствует учетверённому фокусному расстоянию, поэтому $F = 1,4$ см.

Проводя аналогичные рассуждения для рассеивающей линзы, получим $L = a^2/(a + |F|)$. Приравняв его производную нулю, можно убедиться, что эта функция не имеет нетривиальных минимумов:

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{2a(a + |F|) - a^2}{(a + |F|)^2} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = 0, \qquad a = -|2F|.$$

Второй корень соответствует нефизическому отрицательному значению. Это означает, что для рассеивающей линзы график имеет минимум при $a = 0$ и дальше монотонно возрастает. Это не соответствует условию.

Ответ: Линза собирающая, расположена в точке с координатой $x = 4,8$ и имеет фокусное расстояние $F = 1,4$ см.