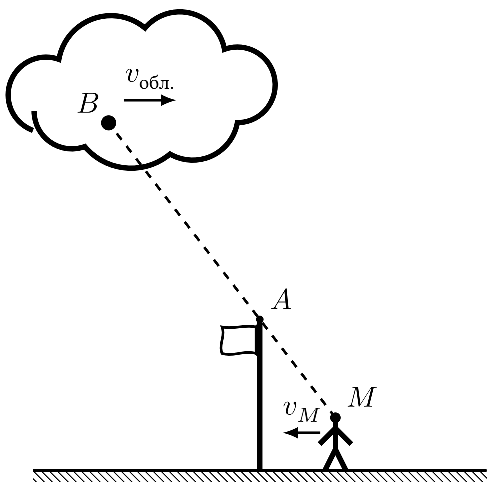
# Возможные решения задач

## 7 класс

## 1-й вариант

### Задача 1.




Разберёмся, почему облако может казаться неподвижным относительно верхушки флагштока. Выберем на облаке некоторую точку $B$. Она будет казаться неподвижной относительно точки $A$, если обе точки будут оставаться при движении на одной прямой с головой Миши ($M$).
Миша движется со скоростью $v_M = 0{,}3$ м/с относительно точки $A$. Поэтому, чтобы оставаться на одной прямой, точка $B$ должна двигаться быстрее пропорционально отношению расстояний $AM/AB$. Следовательно, можем записать

$$\frac{v_{\text{обл.}}}{v_M} = \frac{AB}{AM}. \tag{1}$$

Отношение расстояний можно выразить через соотношение высот

$$\frac{AB}{AM} = \frac{h_B - h_A}{h_A - h_M} = \frac{1000\text{ м} - 10\text{ м}}{10\text{ м} - 1{,}5\text{ м}} = 116{,}5. \tag{2}$$

Тогда скорость облака равна

$$v_{\text{обл.}} = \frac{AB}{AM} \cdot v_M = 116{,}5 \cdot 0{,}3\text{ м/с} \approx 35\text{ м/с}. \tag{3}$$

**Ответ:** Скорость облака равна 35 м/с.

## Задача 2.

При смешивании жидкостей суммарная масса будет сохраняться. Поэтому для того, чтобы найти общую массу смеси, достаточно найти массу каждой из использованных жидкостей по отдельности. Так как мы знаем плотность каждой жидкости, нужно найти использованный объём, который понадобился для того, чтобы заполнить бутылку.

Обозначим изначальный объём каждой жидкости $V_0$. После того, как вторую и третью жидкости смешали, их суммарный объём стал меньше на 10% и стал равен $0{,}9 \cdot (V_0 + V_0)$. После смешивания всех трёх жидкостей бутылка была заполнена целиком, поэтому

$$V_0 + 0{,}9 \cdot (V_0 + V_0) = 1 \text{ л}, \tag{4}$$

откуда можно найти

$$V_0 = \frac{1}{2{,}8} \text{ л}. \tag{5}$$

Зная, какой объём был использован, можно найти массу каждой использованной жидкости

$$m_1 = V_0 \cdot \rho_1 = \frac{1}{2{,}8} \text{ л} \cdot 0{,}700 = 0{,}25 \text{ кг}, \tag{6}$$

$$m_2 = V_0 \cdot \rho_2 = \frac{1}{2{,}8} \text{ л} \cdot 0{,}756 = 0{,}27 \text{ кг}, \tag{7}$$

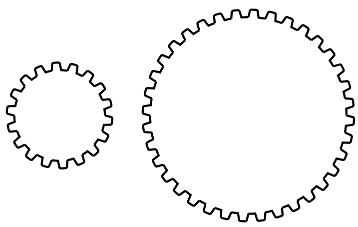
$$m_3 = V_0 \cdot \rho_3 = \frac{1}{2{,}8} \text{ л} \cdot 0{,}784 = 0{,}28 \text{ кг}. \tag{8}$$

И тогда суммарная масса смешанных жидкостей равна

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}80 \text{ кг}. \tag{9}$$

**Ответ:** Общая масса смеси равна 0,80 кг.

## Задача 3.



Так как количество зубцов достаточно велико, можно пренебречь изменением формы зубца и формы промежутка между зубцами. А в таком случае количество материала, удаляемое при вырезании одного зубца пропорционально толщине шестерёнки, то есть увеличилось вдвое.

Масса всего удаляемого материала равна произведению массы, удаляемой при вырезании одного зубца, и количества зубцов, которое также увеличилось пропорционально радиусу шестерёнки, то есть вдвое.

Таким образом, общая масса удаляемого материала увеличилась в 4 раза.

**Ответ:** Масса удаляемого материала увеличилась в 4 раза.

## Задача 4.

Если центр телеги проедет по кругу некоторого радиуса, то одно из колёс (оказавшееся внутри) пройдёт меньшее расстояние, а второе — большее. Если обозначить радиус окружности, по которой поехал центр телеги за $R$, а ширину телеги за $d$ то расстояния, пройденные внутренним колесом, центром и внешним колесом будут соотноситься, как $(R - d/2)\colon R\colon (R + d/2)$.
Если колесо проехало некоторое расстояние $S$, то чем меньше радиус колеса $r$, тем больше ему пришлось совершить оборотов. Поэтому, число оборотов колеса пропорционально отношению

$$N \sim \frac{S}{r}. \tag{10}$$

Вооружившись этой информацией, рассмотрим Несколько случаев.
**Случай 1.** Пусть в первом случае бракованное колесо оказалось при движении внутренним. Тогда количества оборотов каждого из колёс удовлетворяют соотношениям

$$N_1 \sim \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{11}$$

$$N_2 \sim \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{12}$$

где $R_1$ — радиус круга, по которому проехала телега. С другой стороны, компьютер, считая, что колеса одинаковые, вычислил, что радиус круга равен $R_2$. Однако, заранее неизвестно, какое из колёс оказалось внутренним по его расчётам, поэтому возможны два варианта.
**Случай 1а.** Предположим, что внутренним снова оказалось бракованное колесо. Тогда можно написать точно такие же соотношения

$$N_1 \sim \frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{13}$$

$$N_2 \sim \frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{14}$$

но используя одинаковые радиусы колёс. Видно, что из соотношения на $N_2$ следует, что в таком случает $R_1 = R_2$, что противоречит условию.
Поэтому перейдём к следующему случаю, в котором бракованное колесо оказалось внешним.
**Случай 1б.** Напишем соотношения ещё раз

$$N_1 \sim \frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{15}$$

$$N_2 \sim \frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{16}$$

Из этих соотношений можно составить два уравнения

$$\frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{17}$$

$$\frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}. \tag{18}$$

Из второго уравнения следует, что

$$d = R_2 - R_1 = 13\text{ м} - 14\text{ м} = -1\text{ м}. \tag{19}$$

Так как ширина телеги не может быть отрицательной, этот случай нам тоже не подходит.

**Случай 2а.** Пусть при движении бракованное колесо оказалось внешним, а по вычислениям компьютера оно оказалось внутренним. Можно составить два уравнения, аналогичных предыдущему случаю.

$$\frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{20}$$

$$\frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}. \tag{21}$$

Из второго уравнения следует, что

$$d = R_1 - R_2 = 14 \text{ м} - 13 \text{ м} = 1 \text{ м}. \tag{22}$$

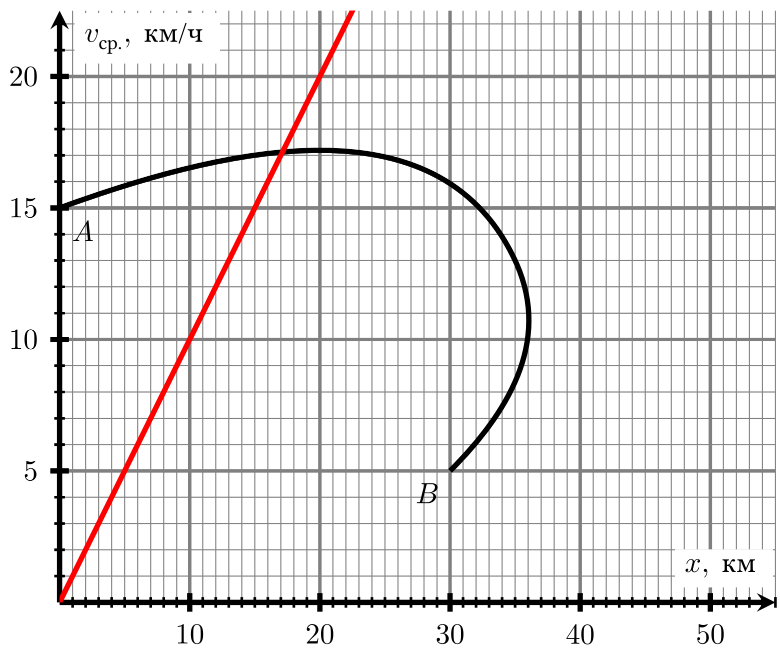
Подставив выраженное значение $d$ в первое уравнение, найдём отношение $r_{\text{брак.}}/r_{\text{станд.}}$

$$\frac{r_{\text{брак.}}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{R_2 - \frac{d}{2}} = \frac{14{,}5 \text{ м}}{12{,}5 \text{ м}} = 1{,}16. \tag{23}$$

То есть размер колеса отличается на 16%.
**Случай 2б.** Этот случай невозможен по тем же причинам, что и **Случай 1а.**

**Ответ:** Размер колеса отличается на 16%.

## Задача 5.




По определению, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср.}} = \frac{x}{t}. \tag{24}$$

Следовательно, на данном графике множество точек

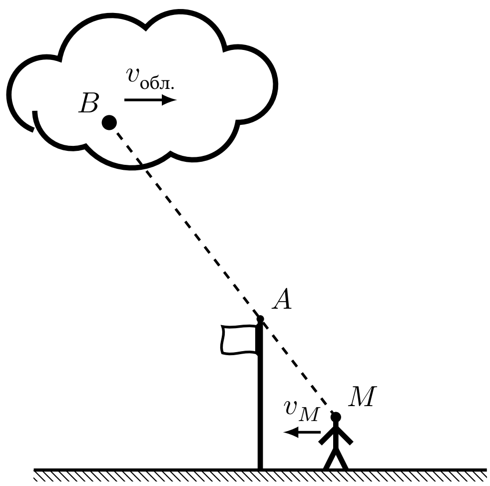
$$\frac{v_{\text{ср.}}}{x} = const. \tag{25}$$

соответствует постоянному значению времени $t$. Построив линию, соответствующую значению $t = 1$ час, и найдя её пересечение с графиком мы найдём точку, которая соответствует положению судна в искомый момент времени.

**Ответ:** Судно находилось на расстоянии 17 км от точки старта.

# Возможные решения задач
## 7 класс
## 2-й вариант

### Задача 1.




Разберёмся, почему облако может казаться неподвижным относительно верхушки флагштока. Выберем на облаке некоторую точку $B$. Она будет казаться неподвижной относительно точки $A$, если обе точки будут оставаться при движении на одной прямой с головой Миши ($M$).

Миша движется со скоростью $v_M = 0{,}2$ м/с относительно точки $A$. Поэтому, чтобы оставаться на одной прямой, точка $B$ должна двигаться быстрее пропорционально отношению расстояний $AM/AB$. Следовательно, можем записать

$$\frac{v_{\text{обл.}}}{v_M} = \frac{AB}{AM}. \tag{1}$$

Отношение расстояний можно выразить через соотношение высот

$$\frac{AB}{AM} = \frac{h_B - h_A}{h_A - h_M} = \frac{2000\text{ м} - 10\text{ м}}{10\text{ м} - 1{,}5\text{ м}} = 234{,}1. \tag{2}$$

Тогда скорость облака равна

$$v_{\text{обл.}} = \frac{AB}{AM} \cdot v_M = 234{,}1 \cdot 0{,}2\text{ м/с} \approx 47\text{ м/с}. \tag{3}$$

**Ответ:** Скорость облака равна 47 м/с.

## Задача 2.

При смешивании жидкостей суммарная масса будет сохраняться. Поэтому для того, чтобы найти общую массу смеси, достаточно найти массу каждой из использованных жидкостей по отдельности. Так как мы знаем плотность каждой жидкости, нужно найти использованный объём, который понадобился для того, чтобы заполнить бутылку.
Обозначим изначальный объём каждой жидкости $V_0$. После того, как вторую и третью жидкости смешали, их суммарный объём стал меньше на 20% и стал равен $0{,}8 \cdot (V_0 + V_0)$. После смешивания всех трёх жидкостей бутылка была заполнена целиком, поэтому

$$V_0 + 0{,}8 \cdot (V_0 + V_0) = 1 \text{ л}, \tag{4}$$

откуда можно найти

$$V_0 = \frac{1}{2{,}6} \text{ л}. \tag{5}$$

Зная, какой объём был использован, можно найти массу каждой использованной жидкости

$$m_1 = V_0 \cdot \rho_1 = \frac{1}{2{,}6} \text{ л} \cdot 0{,}780 = 0{,}30 \text{ кг}, \tag{6}$$

$$m_2 = V_0 \cdot \rho_2 = \frac{1}{2{,}6} \text{ л} \cdot 0{,}832 = 0{,}32 \text{ кг}, \tag{7}$$

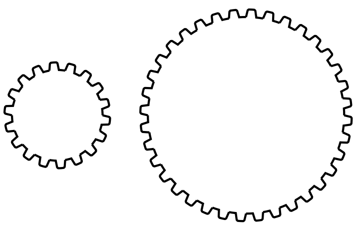
$$m_3 = V_0 \cdot \rho_3 = \frac{1}{2{,}6} \text{ л} \cdot 0{,}858 = 0{,}33 \text{ кг}. \tag{8}$$

И тогда суммарная масса смешанных жидкостей равна

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}95 \text{ кг}. \tag{9}$$

**Ответ:** Общая масса смеси равна 0,95 кг.

## Задача 3.



Так как количество зубцов достаточно велико, можно пренебречь изменением формы зубца и формы промежутка между зубцами. А в таком случае количество материала, удаляемое при вырезании одного зубца пропорционально толщине шестерёнки, то есть увеличилось втрое.
Масса всего удаляемого материала равна произведению массы, удаляемой при вырезании одного зубца, и количества зубцов, которое также увеличилось пропорционально радиусу шестерёнки, то есть втрое.
Таким образом, общая масса удаляемого материала увеличилась в 9 раз.

**Ответ:** Масса удаляемого материала увеличилась в 9 раз.

## Задача 4.

Если центр телеги проедет по кругу некоторого радиуса, то одно из колёс (оказавшееся внутри) пройдёт меньшее расстояние, а второе — большее. Если обозначить радиус окружности, по которой поехал центр телеги за $R$, а ширину телеги за $d$ то расстояния, пройденные внутренним колесом, центром и внешним колесом будут соотноситься, как $(R - d/2)\colon R\colon (R + d/2)$.
Если колесо проехало некоторое расстояние $S$, то чем меньше радиус колеса $r$, тем больше ему пришлось совершить оборотов. Поэтому, число оборотов колеса пропорционально отношению

$$N \sim \frac{S}{r}. \tag{10}$$

Вооружившись этой информацией, рассмотрим Несколько случаев.
**Случай 1.** Пусть в первом случае бракованное колесо оказалось при движении внутренним. Тогда количества оборотов каждого из колёс удовлетворяют соотношениям

$$N_1 \sim \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{11}$$

$$N_2 \sim \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{12}$$

где $R_1$ — радиус круга, по которому проехала телега. С другой стороны, компьютер, считая, что колеса одинаковые, вычислил, что радиус круга равен $R_2$. Однако, заранее неизвестно, какое из колёс оказалось внутренним по его расчётам, поэтому возможны два варианта.
**Случай 1а.** Предположим, что внутренним снова оказалось бракованное колесо. Тогда можно написать точно такие же соотношения

$$N_1 \sim \frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{13}$$

$$N_2 \sim \frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{14}$$

но используя одинаковые радиусы колёс. Видно, что из соотношения на $N_2$ следует, что в таком случает $R_1 = R_2$, что противоречит условию.
Поэтому перейдём к следующему случаю, в котором бракованное колесо оказалось внешним.
**Случай 1б.** Напишем соотношения ещё раз

$$N_1 \sim \frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{15}$$

$$N_2 \sim \frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}, \tag{16}$$

Из этих соотношений можно составить два уравнения

$$\frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{17}$$

$$\frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}. \tag{18}$$

Из второго уравнения следует, что

$$d = R_2 - R_1 = 14\ \text{м} - 13\ \text{м} = 1\ \text{м}. \tag{19}$$

Подставив выраженное значение $d$ в первое уравнение, найдём отношение $r_{\text{брак.}}/r_{\text{станд.}}$

$$\frac{r_{\text{брак.}}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{R_2 + \frac{d}{2}} = \frac{12{,}5\ \text{м}}{14{,}5\ \text{м}} \approx 0{,}86. \tag{20}$$

То есть размер колеса отличается примерно на 14%.

**Случай 2а.** Пусть при движении бракованное колесо оказалось внешним, а по вычислениям компьютера оно оказалось внутренним. Можно составить два уравнения, аналогичных предыдущему случаю.

$$\frac{R_2 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{r_{\text{брак.}}}, \tag{21}$$

$$\frac{R_2 + \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}} = \frac{R_1 - \frac{d}{2}}{r_{\text{станд.}}}. \tag{22}$$

Из второго уравнения следует, что

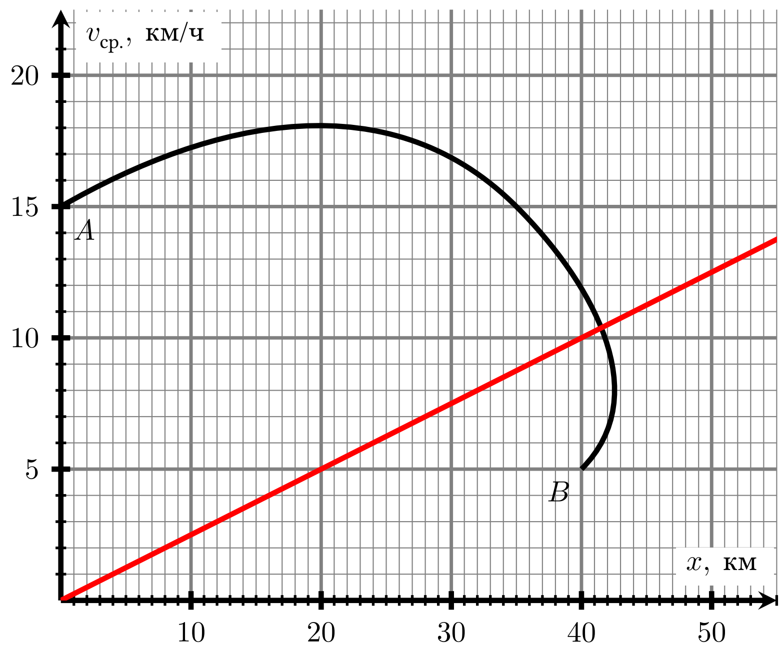
$$d = R_1 - R_2 = 13 \text{ м} - 14 \text{ м} = -1 \text{ м}. \tag{23}$$

Так как ширина телеги не может быть отрицательной, этот случай нам тоже не подходит.

**Случай 2б.** Этот случай невозможен по тем же причинам, что и **Случай 1а.**

**Ответ:** Размер колеса отличается на 14%.

## Задача 5.




По определению, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср.}} = \frac{x}{t}. \tag{24}$$

Следовательно, на данном графике множество точек

$$\frac{v_{\text{ср.}}}{x} = const. \tag{25}$$

соответствует постоянному значению времени $t$. Построив линию, соответствующую значению 4 часа, и найдя её пересечение с графиком мы найдём точку, которая соответствует положению судна в искомый момент времени.

**Ответ:** Судно находилось на расстоянии 41,5 км от точки старта.