

Городской тур 2023/24. 7 класс

Задача 1.

По шкале манометра определяем, что деление 1 бар находится напротив деления 14,5 psi. Соответственно $1 \text{ psi} = 1 \text{ бар} / 14,5 = 6900 \text{ Па}$. По фотографии линейки определяем, что 16 см равно $6\frac{5}{16}$ дюйма, откуда $1 \text{ дюйм} \approx 2,53 \text{ см}$. Теперь переведем единицы площади. В 1 м^2 1560 квадратных дюймов. Тогда давление в 1 psi равно 1560 фунт силы на 1 м^2 или 6900 Н/м^2 . Отсюда 1 фунт силы равен 4,43 Н, тогда 1 фунт составляет приблизительно 0.45 кг или 450 г. Заметим, что при вычислениях мы делали округления. Общепринятое значение фунта составляет 454 г.

Ответ: 1 фунт массы $\approx 450 \text{ г}$.

Задача 2.

Обозначим скорости Миши и Саши v_1 и v_2 и запишем условие первой встречи

$$t_1 = \frac{L}{v_1 + v_2}$$

К моменту второй встречи курьеры вместе проедут расстояние $3L$, тогда вторая встреча произошла через время

$$\frac{3L}{v_1 + v_2}$$

после начала движения. Тогда запишем условие

$$t_2 = \frac{3L}{v_1 + v_2} - \frac{L}{v_1}$$

$$t_2 = 3t_1 - \frac{L}{v_1}$$

Отсюда выражаем

$$v_1 = \frac{L}{3t_1 - t_2} = 28 \text{ км/ч}$$

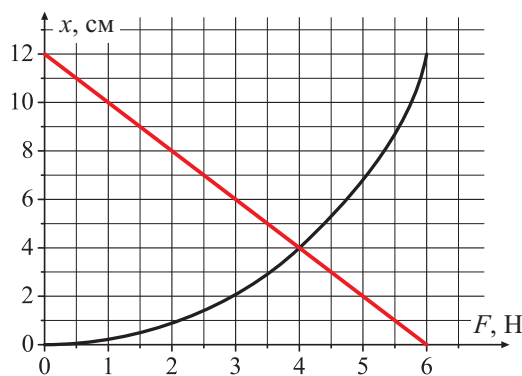
Тогда

$$v_2 = \frac{L}{t_1} - v_1 = \frac{L}{t_1} - \frac{L}{3t_1 - t_2} = 32 \text{ км/ч}$$

Ответ: 28 км/ч и 32 км/ч.

Задача 3.

Если соединить две пружины последовательно, то сила F будет растягивать каждую пружину, а растяжение всей конструкции будет равно сумме растяжений двух пружин. Если первая пружина растянута на x , то вторая пружина должна быть растянута на $S - x$ под действием силы F . Вторая пружина подчиняется закону Гука, значит $F = k_1(S - x)$. Из этого выражения получаем $x = S - \frac{F}{k_1}$. Это условие описывает прямую в координатах (x, F) , изображенную на рисунке. Эта прямая пересекает график зависимости $x(F)$ в точке $F = 4 \text{ Н}$, что и является искомой силой.



Ответ: $F = 4 \text{ Н}$.

Задача 4.

Когда первая катушка сделала 200 оборотов, скорости вращения катушек сравнялись. В этот момент на каждую катушку намотано одинаковое количество ленты. Толщина ленты на катушке пропорциональна количеству слоёв ленты, то есть количеству оборотов катушки. Если обозначить радиус центральной части катушки без ленты как r , а тощину ленты x , тогда после 200 оборотов радиус намотки на первой катушке будет $r + 200x$, а когда на катушку наматывается вся лента радиус станет $r + 300x$. Площадь намотки можно найти как площадь круга без центральной части радиусом r . Из постоянства длины ленты следует постоянство площади намотки

$$\pi(r + 300x)^2 - \pi r^2 = 2 \cdot (\pi(r + 200x)^2 - \pi r^2)$$

Решаем это уравнение относительно x и получаем $r = 50x$. Тогда минимальный радиус катушки r , а максимальный - $7r$. В начальный момент левая катушка вращается в 7 раз медленнее, чем правая, а в конце в 7 раз быстрее. Скорость вращения правой катушки постоянна, значит скорость вращения левой катушки в конце в 49 раз больше, чем в начале.

Ответ: Скорости вращения катушки отличаются в 49 раз

Задача 5.

В первом заезде машинку C нельзя поставить на самый маленький круг. Если даже на самом маленьком круге она отстала от машинки A на 35 с, то во втором заезде машинка C не сможет приехать одновременно с A . Машинка A также не могла в первом заезде оказаться на маленьком круге. Докажем это методом от противного. Если A вначале была на маленьком круге, то во втором заезде она должна проехать по среднему или большому кругу. Значит она потратит минимум в 2 раза больше времени, чем в первом заезде. Маленький круг занят, значит в первом заезде машинка B на среднем или большом круге. Тогда во втором заезде она максимально может проехать в 1,5 раза больший круг, чем в первом. Значит во втором заезде машинка B гарантированно опережает A . Мы получили противоречие с условием задачи. Получается, что в первом заезде на маленьком кругу была машинка B .

Для того, чтобы описать расстановку машинок, вначале будем указывать машинку на большом круге, потом на среднем и в конце - на маленьком. Нам осталось рассмотреть два варианта расстановки машин в первом заезде, ACB и CAB .

Вначале рассмотрим вариант ACB , то есть C на среднем круге и A - на большом. Во втором заезде все машинки должны поменяться кругами. Тогда во втором заезде возможны расстановки BAC и CBA . Во втором заезде A и C финишировали одновременно, тогда при расстановке CBA машинка C должна ехать в 3 раза быстрее, чем A . Но тогда в первом заезде C должна финишировать первой. Для второго заезда остается только расстановка BAC . Поскольку A и C финишировали одновременно, $v_A = 2v_C$. В первом заезде A и B финишировали одновременно, тогда $v_A = 3v_B$. Теперь используем времена. В первом заезде машинка C отстала на t_1

$$\frac{6\pi R}{v_A} + t_1 = \frac{4\pi R}{v_C}$$

Во втором заезде машинка B отстала на t_2

$$\frac{4\pi R}{v_A} + t_2 = \frac{6\pi R}{v_B}$$

Подставим в эти уравнения $v_A = 2v_C$ и $v_A = 3v_B$ и получим $\frac{2\pi R}{v_A} = t_1$ и $\frac{14\pi R}{v_A} = t_2$. Но это противоречит условиям задачи, по условию $t_1 > t_2$.

Остаётся единственно возможный вариант расстановки машинок в первом заезде CAB , то есть A на среднем круге и C - на большом. Из условия что в первом заезде A и B финишировали одновременно получаем $v_A = 2v_B$. Во втором заезде аналогичными рассуждениями исключаем расстановку BCA , при такой расстановке машинка C должна была в первом заезде финишировать первой. Тогда во втором заезде подходит только вариант расстановки ABC и $v_A = 3v_C$. Значит машинка A самая быстрая.

Теперь ответим на второй вопрос задачи, для этого сравним времена заездов

$$\frac{4\pi R}{v_A} + t_1 = \frac{6\pi R}{v_C}$$

$$\frac{6\pi R}{v_A} + t_2 = \frac{4\pi R}{v_B}$$

Подставим $v_A = 3v_C$ и $v_A = 2v_B$ и получим

$$\frac{4\pi R}{v_A} + t_1 = \frac{18\pi R}{v_A}$$

$$\frac{6\pi R}{v_A} + t_2 = \frac{8\pi R}{v_A}$$

Отсюда $t_1 = \frac{14\pi R}{v_A}$ и $t_2 = \frac{2\pi R}{v_A}$. Тогда время проезда большого круга машинкой A будет равно $\frac{6\pi R}{v_A} = 15$ с. Машинка B проедет круг за 30 секунд, а машинка C – за 45 секунд.

Ответ: Самая быстрая машинка A . Машинки проедут большой круг за 15, 30 и 45 секунд.

Задача 6.

Штатив с шариком массой m уравнивает сосуд с водой, значит масса воды в сосуде равна $m = 2$ кг. Когда шарик погрузился под воду, на него стала действовать сила Архимеда, тогда вес шарика в воде будет равен

$$mg - F_A = mg - \rho_0 g V$$

Когда в сосуд добавили воду, на правую чашу весов действует сила тяжести воды $2mg$ и сила тяжести вытесненной шариком воды, численно равная силе Архимеда $\rho_0 g V$. На левую чашку весов действует гиря с силой Mg и вес шарика. Тогда условие равновесия весов

$$2mg + \rho_0 g V = Mg + mg - \rho_0 g V$$

Отсюда

$$\rho_0 g V = \frac{M - m}{2}$$

Объем шарика можно выразить через его массу и плотность $m = \rho V$, тогда

$$\rho_0 \frac{m}{\rho} = \frac{M - m}{2}$$

Окончательно получаем

$$\rho = \frac{2m}{M - m} \rho_0 = 4000 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: плотность шарика $\rho = 4000 \text{ кг/м}^3$

Задача 7.

Будем рассматривать два поршня, соединённых пружиной, как одно тело. По вертикали на них действуют сила тяжести самих поршней Mg , сила тяжести воды над большим поршнем и сила давления воды на маленький поршень. Сила тяжести поршней не изменяется, значит изменение силы давления на маленький поршень компенсирует увеличение веса воды, налитой сверху большого поршня. Пусть уровень воды в правом сосуде поднимается со скоростью u . Из условия несжимаемости жидкости следует, что поршень площади S опускается вниз со скоростью $2u$. Тогда разность уровней воды в правом и левом коленах сообщающихся сосудов возрастает со скоростью $3u$. За время t разность уровней воды в сосудах увеличится на $\rho g 3ut$, значит сила давления воды на маленький поршень увеличится на $\rho g 3utS$. Эта сила будет уравнивать силу тяжести воды, налитой сверху на большой поршень.

$$\rho g 3utS = \rho g vt 3S$$

После сокращений получаем $u = v$. Следовательно, ответ на первый вопрос задачи – уровень воды поднимается со скоростью $v = 1$ см/мин.

Большой поршень опускается вниз со скоростью $3v$, маленький поршень также опускается, но со скоростью $2v$. Тогда длина пружины уменьшается со скоростью v . Сила упругости пружины, действующая на большой поршень, уравнивает силу тяжести поршня и налитой сверху на него воды. Следовательно, увеличение силы упругости пружины при её сжатии уравнивает увеличение веса налитой воды

$$kvt = \rho g vt 3S$$

Отсюда получаем, что жёсткость пружины $k = 3\rho g S$

Ответ: Уровень воды поднимается со скоростью 1 см/мин, жёсткость пружины $k = 3\rho g S$