Городской тур 2023/24. 8 класс

Задача 1. Забег

Расстояние между спортсменами максимально когда их относительная скорость равна нулю, другими словами когда мгновенные скорости спортсменов равны. По графику для первого спортсмена мы видим, что средняя скорость вначале была постоянной, это значит, что спортсмен бежал с постоянной скоростью. Затем средняя скорость возрастала, на этом участке мгновенная скорость больше средней. А по графику на участке от 2й до 4й минуты средняя скорость первого больше, чем мгновенная скорость второго. Значит на этом участке расстояние между спортсменами только увеличивается. На участке с 4й по 8ю минуту средняя скорость остаётся постоянной. Значит на этом участке средняя скорость равна мгновенной скорости. Мы видим, что графики скоростей спортсменов пересекаются как раз на участке постоянной средней скорости первого. Значит максимальное расстояние достигается в точке пересечения, то есть в 6 минут. Теперь найдём максимальное расстояние. Путь первого спортсмена можно найти как произведение средней скорости и времени движения. Первый пробежал 2880 м. Путь второго спортсмена найдём как площадь под графиком скорости от времени. К моменту времени 6 секунд он пробежал 2280 м. Тогда расстояние между спортсменами равно 600 м.

Ответ: максимальное расстояние 600 м через 6 минут после старта.

Задача 2. Яндекс Навигатор

Если бы на дороге не случилось аварии, то Саша проехал бы расстояние L до места аварии за время L/v. С момента аварии до въезда в затор навигатор все время показывал одинаковое оставшееся время в пути. Обозначим длину затора в момент, когда Саша въезжает в него S, машина проезжает это расстояние со скорсотью u. Тогда условие одинакового времени в пути можно записать как $S/u = L/v$. Отсюда находим, что $S = Lu/v = 6$ км. Расстояние $L - S$ Саша проехал по еще свободной дороге со скоростью v за время $(L - S)/v = 20$ мин. Это и будет то время, на которое Саша задержался из-за затора на дороге. Значит Саша приедет к бабушке в 12:20.

Ответ: в 12:20.

Задача 3. Прогиб балки

Известно, что среди четырёх ответов есть правильный, значит нужно исключить три неправильных варианта. Если взять две одинаковые балки и расположить их рядом, то для прогиба каждой балки на прежнее расстояние потребуется прежняя сила. Значит суммарно потребуется сила в 2 раза больше. Из этого рассуждения делаем вывод, что при одинаковом прогибе сила F должна быть пропорциональна ширине b. Поэтому вариант 4, в котором прогиб зависит от b^3 не подходит.

Проанализируем зависимость стрелы прогиба от длины балки. Если увеличить длину балки L в 2 раза, то даже при сохранении формы близкой к стенке части балки (что неправда), прогиб увеличится больше, чем в 2 раза. Это расусждение позволяет исключить второй вариант, согласно которому прогиб балки пропорционален длине L в первой степени.

Теперь проанализируем зависимость прогиба от толщины балки h. Когда мы изгибаем балку как показано на рисунке к задаче, верхняя часть балки растягивается, а нижняя – сжимается. Если две одинаковые балки положить сверху друг на друга, а затем подействовать на общий конец с удвоенной силой $2F$, то каждая балка будет прогибаться силой F и прогиб будет тем же. Но в этом случае соприкасающиеся поверхности балок будут вести себя по-разному. Одна будет сжиматься, вторая – растягиваться. Если две балки склеить между собой, то прогнуть их будет сложнее. Из этого рассуждения следует, что при увеличении толщины h в 2 раза, сила F, дающая тот же прогиб увеличивается более, чем в 2 раза. Поэтому первый вариант не может быть правильным.

Окончательно получаем, что правильный вариант третий.

Ответ: третий вариант, $\frac{L^3F}{bh^3}$.

Задача 4. Неожиданное всплытие

Вначале шарик опустился на дно стакана, значит он вытеснил объем воды V_2, и в стакане остался объем $V_1 - V_2$ воды. По графику определяем, что плотность воды при температуре t_0 равна 988 кг/м^3, следовательно масса оставшейся в стакане воды равна $m_1 = 98{,}8$ г. В дальнейшем вода будет охлаждаться, а её плотность – увеличиваться. Поэтому больше вода из стакана выливаться не будет.

Для того, чтобы шарик всплыл, его плотность должна быть меньше плотности воды. Плотность шарика $\rho = m/V_2 = 990$ кг/м^3. По графику определяем, что плотность воды больше ρ при температуре меньшей, чем $t = 45{,}5$°C. Значит в процессе теплообмена между шариком и водой температура воды должна опуститься до значения меньше, чем t.

Рассмотрим крайний случай, когда температура воды после окончания теплообмена будет равна t и для этого случая запишем уравнение теплового баланса.

$$m_1 c_1 (t_0 - t) = m c_2 (t - t_2)$$

В этом выражении t_2 – начальная температура шарика. Решая уравнение относительно t_2 получаем

$$t_2 = t - \frac{m_1 c_1 (t_0 - t)}{m c_2} \approx 36℃$$

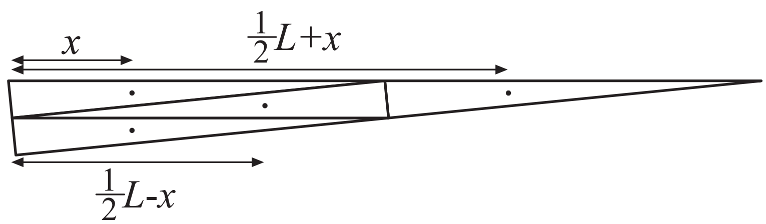
Очевидно, что если начальная температура шарика будет меньше, то температура воды после окончания теплообмена окажется меньше, чем $t = 45{,}5$ °C и шарик всплывёт.

Ответ: Начальная температура шарика меньше, чем 36°C

Задача 5. Девочка на плоту

Рассмотрим силы, действующие на плот. Это сила тяжести самого плота Mg, сила тяжести девочки mg и сила Архимеда, действующая на погруженную в воду часть плота. Сила тяжести плота приложена в центре, сила тяжести девочки приложена к краю плота, на котором стоит девочка. Теперь мы должны понять к какой точке приложена сила Архимеда, то есть нужно найти положение центра масс погруженной части плота.

Погруженная в воду часть плота имеет форму треугольника (треугольной призмы). Длина стороны треугольника равна длине плота L. Разделим этот треугольник на 4 равных треугольника, как показано на рисунке. Пусть центр масс маленького треугольника (на рисунке показан точкой) расположен на расстоянии x от маленькой стороны. Большой треугольник состоит из 4х маленьких, а его центр масс, как следует из соображений подобия, должен находиться на расстоянии $2x$ от маленькой стороны. Положение центра масс большого треугольника можем найти как $2x = \frac{2x + (L/2 - x) + (L/2 + x)}{4}$. Это уравнение решаем относительно x и получаем $x = \frac{L}{6}$ или $2x = \frac{L}{3}$.



Запишем правило рычага относительно точки приложения силы Архимеда (центра масс погруженной части плота)

$$mg\frac{L}{3} = Mg\frac{L}{6}$$

Из этого уравнения получаем, что масса плота $M = 2m = 100$ кг. Плот с девочкой погружен в воду на половину объема, тогда условие плавания плота (равенство силы Архимеда и суммарной силы тяжести) запишется в виде

$$(m + M)g = \rho g \frac{1}{2} V$$

Если максимально загрузить плот, то он будет полностью погружен в воду. Обозначим массу груза m_1, условие плавания плота можно записать как

$$(m_1 + M)g = \rho g V = 2(m + M)g$$

Отсюда получаем, что максимальная масса груза будет равна $m_1 = 2m + M = 4m = 200$ кг,

Ответ: грузоподъёмность плота 200 кг.

Задача 6. Подогрев воды

Будем называть воду, текущую по внешщней большой трубке грязной, а воду во внутренней трубке – чистой. Когда поток чистой воды маленький, она на выходе из теплообменника нагревается до температуры грязной воды на входе. Из графика видим, что эта температура равна $t_0 = 70℃$. в случае когда расход чистой воды больше, чем $q_0 = 100$ л/мин, температура чистой воды на выходе оказывается ниже, чем 70℃. Это происходит потому, что теплоты, отданной грязной водой при остывании до начальной температуры чистой воды не хватает, чтобы нагреть чистую воду до 70℃. Значит постоянный расход грязной воды через теплообменник равен q_0.

Теперь выберем на нелинейном участке графика удобную точку, например при расходе чистой воды $2q_0 = 200$ л/мин температура воды на выходе равна $t_1 = 40$℃. В этом случае грязная вода отдаёт чистой максимальное количество теплоты и на выходе из теплообменника имеет температуру t, равную температуре чистой воды на входе в теплообменник. Запишем уравнение теплового баланса.

$$q_0 c(t_0 - t) = 2q_0 c(t_1 - t)$$

Решая это уравнение получаем $t = 2t_1 - t_0 = 10$℃

Ответ: Температура холодной воды на входе в теплообменник 10℃.

Задача 7. Переливание воды

Под действием силы тяжести воды большой поршень будет опускаться вниз. Обозначим скорость большого поршня u. Из несжимаемости воды следует, что поршень площади S будет опускаться вниз со скорстью $3u$, а поршень площади $2S$ будет подниматься со скорстью $3u/2$. Длина пружины жёсткостью $3k$ будет увеличиваться со скоростью $2u$, а пружина жёсткостью $4k$ будет растягиваться со скоростью $3u/2$. За время t поршень в правом сосуде поднимется на $3ut/2$, на такое же расстояние растянется пружина. Тогда давление жидкости на дно сосуда увеличится на

$$\Delta P = \frac{3}{2}\rho gut + \frac{3 \cdot 4kut}{2 \cdot 2S} = \frac{3}{2}\rho gut + \frac{3kut}{S}$$

Теперь посчитаем изменение давления на дно в левом сосуде. Сверху на поршень площади $3S$ налили столб воды высотой vt, давление воды на поршень увеличилось на ρgvt. Из-за растяжения пружины давление под поршнем площади $3S$ увеличилось на $\frac{3k2ut}{3S}$. Аналогично, из-за растяжения пружины давление снизу маленького поршня уменьшилось на $\frac{3k2ut}{S}$. Наконец, уровень воды под поршнем площади $3S$ уменьшился на ut, значит давление на дно уменьшилось на ρgut. Сложим все вклады и получим

$$\Delta P = \rho gvt - \rho gut + \frac{3k2ut}{3S} - \frac{3k2ut}{S}$$

Приравниваем два выражения для изменения давления на дно сообщающихся сосудов и получаем выражение для искомой скорости u

$$u = \frac{\rho gv}{\frac{5}{2}\rho g + \frac{7k}{S}} = \frac{2v}{5 + \frac{14k}{\rho gS}}$$

Ответ: Поршень опускаеться вниз со скоростью $u = \frac{2v}{5+\frac{14k}{\rho gS}}$