Возможные решения задач

9 класс

1-й вариант

Задача 1. Там то же, что у нас

Тело, падающее из состояния покоя с ускорением g, проходит за время t расстояние $gt^2/2$. Значит, за n-ю секунду падения оно пройдёт

$$\frac{g}{2}(n\ \text{с})^2 - \frac{g}{2}((n-1)\ \text{с})^2 = g\frac{2n-1}{2}\cdot 1\ \text{с}^2. \tag{1}$$

Пусть ускорение свободного падения на планете b равно g_b, а на планете d — g_d. Тогда по условию задачи имеем

$$g_\text{b}\frac{2\cdot 2-1}{2}\cdot 1\ \text{с}^2 = g_\text{d}\frac{2\cdot 3-1}{2}\cdot 1\ \text{с}^2, \tag{2}$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{g_\text{b}}{g_\text{d}} = \frac{5}{3}. \tag{3}$$

Ответ: отношение ускорений свободного падения на планетах b и d равно $5/3$.

Задача 2. Отрицательно сэкономил

В результате полной электрификации семья Вовы перестанет платить за горячую воду, но станет потреблять больше холодной. Это приведёт к экономии, ведь раньше они платили за воду

$$85\ \text{руб.} + 240\ \text{руб.} = 325\ \text{руб.}, \tag{4}$$

а теперь будут платить

$$\frac{2{,}5\ \text{м}^3 + 2\ \text{м}^3}{2{,}5\ \text{м}^3}\cdot 85\ \text{руб.} = 153\ \text{руб.} \tag{5}$$

Разница между новым счётом за воду и старым будет равна

$$\Delta_\text{вода} = 153\ \text{руб.} - 325\ \text{руб.} = -172\ \text{руб.} \tag{6}$$

Но кроме этого семья начнёт больше платить за электроэнергию, ведь 2 м^3 холодной воды нужно нагреть с 10 °C до 70 °C. На это потребуется тепловая энергия

$$\begin{aligned} mc\Delta T = V\rho c(T_\text{г} - T_\text{х}) &= 2\ \text{м}^3 \cdot 1000\ \text{кг/м}^3 \cdot 4200\ \text{Дж/(кг·°C)} \cdot (70\ \text{°C} - 10\ \text{°C}) \\ &= 5{,}04\cdot 10^6\ \text{Дж} = \frac{5{,}04\cdot 10^6}{1000\cdot 60\cdot 60}\ \text{кВт}\cdot\text{ч} = 140\ \text{кВт}\cdot\text{ч}. \end{aligned} \tag{7}$$

Значит, теперь семья будет платить за электроэнергию

$$\frac{520\ \text{кВт}\cdot\text{ч} + 140\ \text{кВт}\cdot\text{ч}}{520\ \text{кВт}\cdot\text{ч}}\cdot 2080\ \text{руб.} = 2640\ \text{руб.}, \tag{8}$$

что приведёт к убытку в

$$\Delta_\text{эл.} = 2640\ \text{руб.} - 2080\ \text{руб.} = 560\ \text{руб.} \tag{9}$$

Складывая экономию на воде с убытком на электроэнергии, находим ответ

$$\Delta = \Delta_\text{эл.} + \Delta_\text{вода} = 560\ \text{руб.} - 172\ \text{руб} = 388\ \text{руб.} \tag{10}$$

Ответ: общая сумма счёта увеличится на 388 руб.

Задача 3. Ток через различные ориентации

Электрическое сопротивление проводника с удельным сопротивлением ρ, длиной ℓ и площадью поперечного сечения S равно

$$R = \rho \frac{\ell}{S}. \tag{11}$$

Когда брусок зажимают между пластинами, перпендикулярная пластинам сторона играет роль длины, а две другие образуют площадь, через которую течёт ток. Обозначим длины сторон бруска $a = 5$ см, b и c в порядке возрастания. Тогда три возможных значения сопротивления это

$$R_a = \rho \frac{a}{bc}, \qquad R_b = \rho \frac{b}{ac}, \qquad R_c = \rho \frac{c}{ab}. \tag{12}$$

Нетрудно понять, что $R_a < R_b < R_c$, значит

$$R_a = 2 \text{ Ом}, \qquad R_b = 12 \text{ Ом}, \qquad R_c = 27 \text{ Ом}. \tag{13}$$

Поскольку ρ нам неизвестно, исключим его из уравнений, рассматривая отношения сопротивлений:

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{\rho \frac{b}{ac}}{\rho \frac{a}{bc}} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \frac{R_b}{R_c} = \frac{b^2}{c^2}, \qquad \frac{R_c}{R_a} = \frac{c^2}{a^2}. \tag{14}$$

Мы связали отношения сопротивлений с отношениями сторон бруска. Теперь мы можем найти объём:

$$V = abc = a^3 \frac{b}{a} \frac{c}{a} = a^3 \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} \sqrt{\frac{R_c}{R_a}} = (5 \text{ см})^3 \sqrt{\frac{12 \text{ Ом}}{2 \text{ Ом}}} \sqrt{\frac{27 \text{ Ом}}{2 \text{ Ом}}} = 1125 \text{ см}^3. \tag{15}$$

Ответ: объём бруска равен 1125 см^3.

Задача 4. Спуск переворотом

Разберёмся, как связана сила натяжения нити с перемещением тел. Для простоты будем рассматривать верхнее тело. До разрезания нити на него действуют три силы: сила тяжести, сила натяжения нити и сила Архимеда. Тело находится в равновесии, поэтому

$$mg + T = F_{\text{Арх.}}. \tag{16}$$

После разрезания нити верхнее тело поднимается и попадает в менее плотные слои жидкости. Сила Архимеда на новой глубине меньше исходной и равна силе тяжести:

$$mg = F'_{\text{Арх.}}. \tag{17}$$

Таким образом,

$$F_{\text{Арх.}} - F'_{\text{Арх.}} = T. \tag{18}$$

Чтобы понять, как изменяется сила Архимеда с глубиной, вспомним, что сила Архимеда равна весу вытесненной телом жидкости. Значит, надо сравнить вес одного и того же объёма жидкости на разных глубинах. Сперва рассмотрим объём ΔVдостаточно малый, чтобы изменением плотности на его протяжении можно было пренебречь. Получим

$$\Delta F_{\text{Арх.}} - \Delta F'_{\text{Арх.}} = \Delta V \rho g - \Delta V \rho' g = (\rho - \rho')\Delta V g, \tag{19}$$

где ρ и ρ' — плотности на старой и новой глубинах. По условию задачи плотность зависит от глубины линейно, т.е.

$$\rho(h) = \alpha(h - h_0), \tag{20}$$

где α и h_0 — некоторые постоянные. Тогда для малого объёма имеем

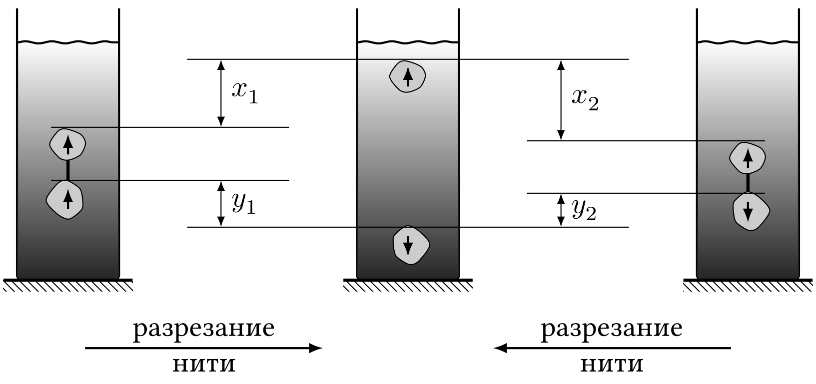
$$\Delta F_{\text{Арх.}} - \Delta F'_{\text{Арх.}} = (\rho(h) - \rho(h'))\Delta V g = \alpha(h - h')\Delta V g. \tag{21}$$

Поскольку при всплытии без переворота тела глубина каждой малой его части изменяется одинаково, получаем, что и сила Архимеда, действующая на каждую малую его часть изменяется одинаково. Тогда суммарное изменение для всего тела равно

$$F_{\text{Арх.}} - F'_{\text{Арх.}} = \alpha(h - h')Vg = T. \tag{22}$$

Следовательно, сила натяжения пропорциональна объёму тела и перемещению тела после перерезания нити, если при этом перемещении тело не переворачивалось. Заметим, что для погружения без переворота работает то же рассуждение, но знак перемещения и силы натяжения противоположный.

В этой задаче не нужно разбираться в причинах переворота нижнего тела. Достаточно понимать, что самопроизвольно переворачиваясь, тело переходит в более устойчивое положение. Из этого можно сделать следующий вывод: если бы нижнее тело сразу было перевернуто, то после разрезания нити тела пришли бы в те же финальные положения. Введём для этих двух экспериментов (разрезание нити при различной ориентации нижнего тела) следующие обозначения (см.рисунок).



Поскольку длина нити одинакова в обоих случаях, получаем геометрическую связь

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2. \tag{23}$$

Обозначим объём верхнего тела V, тогда объём нижнего — $2V$. Силы натяжения обозначим T_1 и T_2. Теперь воспользуемся соотношением (22) для тел, которые не переворачивались:

$$\alpha x_1 V g = T_1, \qquad \alpha x_2 V g = T_2, \qquad \alpha y_2 2V g = T_2. \tag{24}$$

Преобразуем, используя (23),

$$2T_2 + T_2 = 2(x_2 + y_2)\alpha V g = 2(x_1 + y_1)\frac{T_1}{x_1}, \tag{25}$$

и находим ответ

$$T_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1 + y_1}{x_1} T_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \text{ см} + 8 \text{ см}}{10 \text{ см}} \cdot 10 \text{ Н} = 12 \text{ Н}. \tag{26}$$

Ответ: сила натяжения была бы 12 Н.

Задача 5. Невыносимая тяжесть поролона

Сперва отметим, что ввиду сохранения массы и площади листа под давлением, его плотность ρ связана с толщиной h простым соотношением

$$\rho h = \rho_0 h_0, \tag{27}$$

где $\rho_0 = 2$ г/см^3 и $h_0 = 1$ см.

Начнём рассматривать листы начиная с верхнего. Его толщина равна h_0, а плотность ρ_0, поскольку на него ничего не давит. Второй лист будет сжат весом первого, то есть он будет под давлением

$$\Delta p = \rho_0 h_0 g = 2000 \text{ кг/м}^3 \cdot 0{,}01 \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 200 \text{ Па}. \tag{28}$$

Тогда его толщина будет $h(\Delta p)$, где зависимость толщины листа от объёма дана на графике из условия. Ясно, что третий лист будет сжат давлением $2\Delta p$ и будет иметь толщину $h(2\Delta p)$. Так можно продолжить до листа номера n. Он будет сжат давлением $(n-1)\Delta p$, а его толщина будет равна $h\big((n-1)\Delta p\big)$.

Количество листов N в стопке высотой $H = 1$ м определяется условием

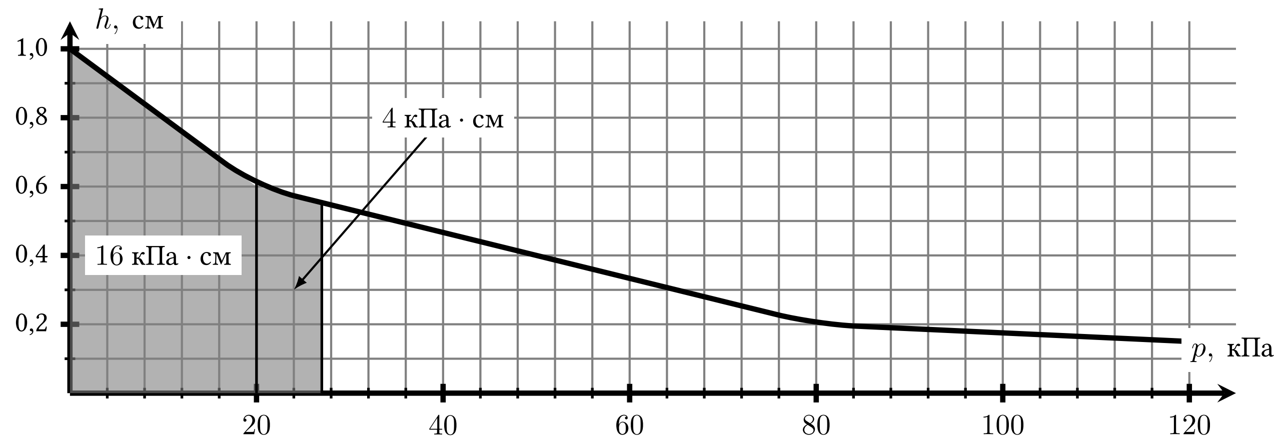
$$h_0 + h(\Delta p) + h(2\Delta p) + ... + h\big((N-1)\Delta p\big) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p) = H, \tag{29}$$

где мы использовали, что $h_0 = h(0)$.

Ясно, что $N > H/h_0 = 100$, а Δp много меньше делений на графике, поэтому вычисление этой суммы обычным способом для нужного нам количества слагаемых не представляется возможным. Вместо этого мы воспользуемся малостью Δp. Домножим сумму на малый «шаг» Δp:

$$H\Delta p = \left(\sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p)\right)\Delta p = \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p)\Delta p. \tag{30}$$

Выражение справа есть не что иное, как площадь под графиком $h(p)$ от 0 до $(N-1)\Delta p$. Таким образом, нам нужно найти ту начальную часть графика, площадь под которой равна $H\Delta p = 200$ Па $\cdot$ м $= 20$ кПа $\cdot$ см, и определить давление на правом его конце. График состоит из линейных участков, площадь под которыми легко ищется по формуле площади трапеции или прямоугольного треугольника.



Давление на правом конце графика получилось равным 27 кПа. С другой стороны, это давление, создаваемое всей стопкой, то есть $N\Delta p$. Получаем ответ

$$N = \frac{27 \text{ кПа}}{200 \text{ Па}} = 135. \tag{31}$$

<u>**Ответ:**</u> в одной стопке 135 листов.

Возможные решения задач
9 класс
2-й вариант

Задача 1. Там то же, что у нас

Тело, падающее из состояния покоя с ускорением g, проходит за время t расстояние $gt^2/2$. Значит, за n-ю секунду падения оно пройдёт

$$\frac{g}{2}(n\ \text{с})^2 - \frac{g}{2}((n-1)\ \text{с})^2 = g\frac{2n-1}{2} \cdot 1\ \text{с}^2. \tag{32}$$

Пусть ускорение свободного падения на планете b равно g_b, а на планете d — g_d. Тогда по условию задачи имеем

$$3 \cdot g_\text{b}\frac{2 \cdot 1 - 1}{2} \cdot 1\ \text{с}^2 = g_\text{d}\frac{2 \cdot 3 - 1}{2} \cdot 1\ \text{с}^2, \tag{33}$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{g_\text{b}}{g_\text{d}} = \frac{5}{3}. \tag{34}$$

Ответ: отношение ускорений свободного падения на планетах b и d равно $5/3$.

Задача 2. Отрицательно сэкономил

В результате полной электрификации семья Вовы перестанет платить за горячую воду, но станет потреблять больше холодной. Это приведёт к экономии, ведь раньше они платили за воду

$$100\ \text{руб.} + 287\ \text{руб.} = 387\ \text{руб.}, \tag{35}$$

а теперь будут платить

$$\frac{2{,}5\ \text{м}^3 + 2\ \text{м}^3}{2{,}5\ \text{м}^3} \cdot 100\ \text{руб.} = 180\ \text{руб.} \tag{36}$$

Разница между новым счётом за воду и старым будет равна

$$\Delta_\text{вода} = 180\ \text{руб.} - 387\ \text{руб.} = -207\ \text{руб.} \tag{37}$$

Но кроме этого семья начнёт больше платить за электроэнергию, ведь $2\ \text{м}^3$ холодной воды нужно нагреть с $10\ ^\circ\text{C}$ до $70\ ^\circ\text{C}$. На это потребуется тепловая энергия

$$\begin{aligned} mc\Delta T = V\rho c(T_\text{г} - T_\text{х}) &= 2\ \text{м}^3 \cdot 1000\ \text{кг/м}^3 \cdot 4200\ \text{Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)} \cdot (70\ ^\circ\text{C} - 10\ ^\circ\text{C}) \\ &= 5{,}04 \cdot 10^6\ \text{Дж} = \frac{5{,}04 \cdot 10^6}{1000 \cdot 60 \cdot 60}\ \text{кВт} \cdot \text{ч} = 140\ \text{кВт} \cdot \text{ч}. \end{aligned} \tag{38}$$

Значит, теперь семья будет платить за электроэнергию

$$\frac{480\ \text{кВт} \cdot \text{ч} + 140\ \text{кВт} \cdot \text{ч}}{480\ \text{кВт} \cdot \text{ч}} \cdot 2040\ \text{руб.} = 2635\ \text{руб.}, \tag{39}$$

что приведёт к убытку в

$$\Delta_\text{эл.} = 2635\ \text{руб.} - 2040\ \text{руб.} = 595\ \text{руб.} \tag{40}$$

Складывая экономию на воде с убытком на электроэнергии, находим ответ

$$\Delta = \Delta_\text{эл.} + \Delta_\text{вода} = 595\ \text{руб.} - 207\ \text{руб} = 388\ \text{руб.} \tag{41}$$

Ответ: общая сумма счёта увеличится на 388 руб.

Задача 3. Ток через различные ориентации

Электрическое сопротивление проводника с удельным сопротивлением ρ, длиной ℓ и площадью поперечного сечения S равно

$$R = \rho\frac{\ell}{S}. \tag{42}$$

Когда брусок зажимают между пластинами, перпендикулярная пластинам сторона играет роль длины, а две другие образуют площадь, через которую течёт ток. Обозначим длины сторон бруска a, b и $c = 15$ см в порядке возрастания. Тогда три возможных значения сопротивления это

$$R_a = \rho\frac{a}{bc}, \qquad R_b = \rho\frac{b}{ac}, \qquad R_c = \rho\frac{c}{ab}. \tag{43}$$

Нетрудно понять, что $R_a < R_b < R_c$, значит

$$R_a = 4\ \text{Ом}, \qquad R_b = 9\ \text{Ом}, \qquad R_c = 18\ \text{Ом}. \tag{44}$$

Поскольку ρ нам неизвестно, исключим его из уравнений, рассматривая отношения сопротивлений:

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{\rho\frac{b}{ac}}{\rho\frac{a}{bc}} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \frac{R_b}{R_c} = \frac{b^2}{c^2}, \qquad \frac{R_a}{R_c} = \frac{a^2}{c^2}. \tag{45}$$

Мы связали отношения сопротивлений с отношениями сторон бруска. Теперь мы можем найти объём:

$$V = abc = \frac{a}{c}\frac{b}{c}c^3 = \sqrt{\frac{R_a}{R_c}}\sqrt{\frac{R_b}{R_c}}c^3 = \sqrt{\frac{4\ \text{Ом}}{18\ \text{Ом}}}\sqrt{\frac{9\ \text{Ом}}{18\ \text{Ом}}}(15\ \text{см})^3 = 1125\ \text{см}^3. \tag{46}$$

Ответ: объём бруска равен $1125\ \text{см}^3$.

Задача 4. Спуск переворотом

Разберёмся, как связана сила натяжения нити с перемещением тел. Для простоты будем рассматривать верхнее тело. До разрезания нити на него действуют три силы: сила тяжести, сила натяжения нити и сила Архимеда. Тело находится в равновесии, поэтому

$$mg + T = F_{\text{Арх.}}. \tag{47}$$

После разрезания нити верхнее тело поднимается и попадает в менее плотные слои жидкости. Сила Архимеда на новой глубине меньше исходной и равна силе тяжести:

$$mg = F'_{\text{Арх.}}. \tag{48}$$

Таким образом,

$$F_{\text{Арх.}} - F'_{\text{Арх.}} = T. \tag{49}$$

Чтобы понять, как изменяется сила Архимеда с глубиной, вспомним, что сила Архимеда равна весу вытесненной телом жидкости. Значит, надо сравнить вес одного и того же объёма жидкости на разных глубинах. Сперва рассмотрим объём ΔVдостаточно малый, чтобы изменением плотности на его протяжении можно было пренебречь. Получим

$$\Delta F_{\text{Арх.}} - \Delta F'_{\text{Арх.}} = \Delta V \rho g - \Delta V \rho' g = (\rho - \rho')\Delta V g, \tag{50}$$

где ρ и ρ' — плотности на старой и новой глубинах. По условию задачи плотность зависит от глубины линейно, т.е.

$$\rho(h) = \alpha(h - h_0), \tag{51}$$

где α и h_0 — некоторые постоянные. Тогда для малого объёма имеем

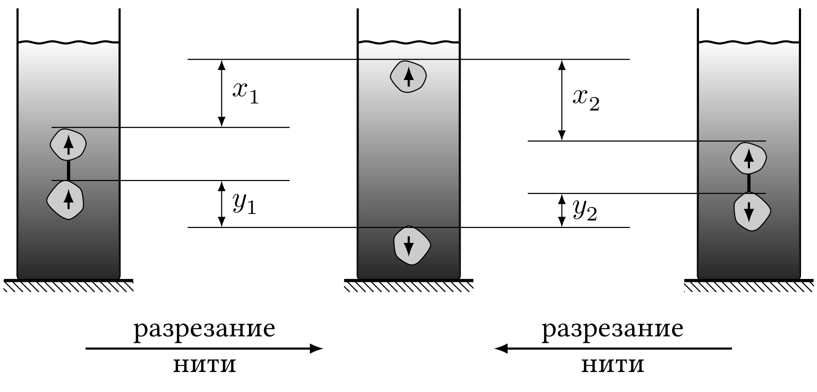
$$\Delta F_{\text{Арх.}} - \Delta F'_{\text{Арх.}} = (\rho(h) - \rho(h'))\Delta V g = \alpha(h - h')\Delta V g. \tag{52}$$

Поскольку при всплытии без переворота тела глубина каждой малой его части изменяется одинаково, получаем, что и сила Архимеда, действующая на каждую малую его часть изменяется одинаково. Тогда суммарное изменение для всего тела равно

$$F_{\text{Арх.}} - F'_{\text{Арх.}} = \alpha(h - h')V g = T. \tag{53}$$

Следовательно, сила натяжения пропорциональна объёму тела и перемещению тела после перерезания нити, если при этом перемещении тело не переворачивалось. Заметим, что для погружения без переворота работает то же рассуждение, но знак перемещения и силы натяжения противоположный.

В этой задаче не нужно разбираться в причинах переворота нижнего тела. Достаточно понимать, что самопроизвольно переворачиваясь, тело переходит в более устойчивое положение. Из этого можно сделать следующий вывод: если бы нижнее тело сразу было перевернуто, то после разрезания нити тела пришли бы в те же финальные положения. Введём для этих двух экспериментов (разрезание нити при различной ориентации нижнего тела) следующие обозначения (см.рисунок).



Поскольку длина нити одинакова в обоих случаях, получаем геометрическую связь

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2. \tag{54}$$

Обозначим объём нижнего тела V, тогда объём верхнего — $2V$. Силы натяжения обозначим T_1 и T_2. Теперь воспользуемся соотношением (53) для тел, которые не переворачивались:

$$\alpha x_1 2Vg = T_1, \qquad \alpha x_2 2Vg = T_2, \qquad \alpha y_2 Vg = T_2. \tag{55}$$

Преобразуем, используя (54),

$$T_2 + 2T_2 = 2(x_2 + y_2)\alpha Vg = 2(x_1 + y_1)\frac{T_1}{2x_1}, \tag{56}$$

и находим ответ

$$T_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1 + y_1}{x_1} T_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\text{ см} + 12\text{ см}}{4\text{ см}} \cdot 9\text{ Н} = 12\text{ Н}. \tag{57}$$

Ответ: сила натяжения была бы 12 Н.

Задача 5. Невыносимая тяжесть поролона

Сперва отметим, что ввиду сохранения массы и площади листа под давлением, его плотность ρ связана с толщиной h простым соотношением

$$\rho h = \rho_0 h_0, \tag{58}$$

где $\rho_0 = 1$ г/см^3 и $h_0 = 1$ см.

Начнём рассматривать листы начиная с верхнего. Его толщина равна h_0, а плотность ρ_0, поскольку на него ничего не давит. Второй лист будет сжат весом первого, то есть он будет под давлением

$$\Delta p = \rho_0 h_0 g = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 0{,}01 \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 100 \text{ Па}. \tag{59}$$

Тогда его толщина будет $h(\Delta p)$, где зависимость толщины листа от объёма дана на графике из условия. Ясно, что третий лист будет сжат давлением $2\Delta p$ и будет иметь толщину $h(2\Delta p)$. Так можно продолжить до листа номера n. Он будет сжат давлением $(n-1)\Delta p$, а его толщина будет равна $h\big((n-1)\Delta p\big)$.

Количество листов N в стопке высотой $H = 1$ м определяется условием

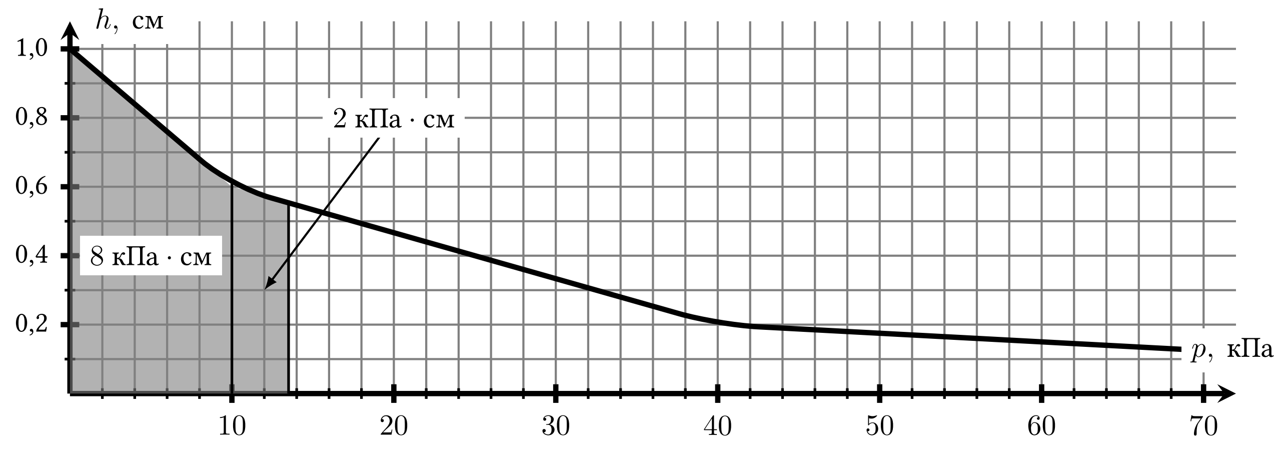
$$h_0 + h(\Delta p) + h(2\Delta p) + \ldots + h\big((N-1)\Delta p\big) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p) = H, \tag{60}$$

где мы использовали, что $h_0 = h(0)$.

Ясно, что $N > H/h_0 = 100$, а Δp много меньше делений на графике, поэтому вычисление этой суммы обычным способом для нужного нам количества слагаемых не представляется возможным. Вместо этого мы воспользуемся малостью Δp. Домножим сумму на малый «шаг» Δp:

$$H\Delta p = \left(\sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p)\right)\Delta p = \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta p)\Delta p. \tag{61}$$

Выражение справа есть не что иное, как площадь под графиком $h(p)$ от 0 до $(N-1)\Delta p$. Таким образом, нам нужно найти ту начальную часть графика, площадь под которой равна $H\Delta p = 100$ Па $\cdot$ м $= 10$ кПа $\cdot$ см, и определить давление на правом его конце. График состоит из линейных участков, площадь под которыми легко ищется по формуле площади трапеции или прямоугольного треугольника.



Давление на правом конце графика получилось равным 13,5 кПа. С другой стороны, это давление, создаваемое всей стопкой, то есть $N\Delta p$. Получаем ответ

$$N = \frac{13{,}5 \text{ кПа}}{100 \text{ Па}} = 135. \tag{62}$$

Ответ: в одной стопке 135 листов.