Городской тур 2023/24. 9 класс

Задача 1.

Введём обозначения: L – длина платформы, v_0 – начальная скорость лягушки относительно поверхности, по которой она прыгает. Рассмотрим лягушку, которая прыгает под углом β к земле. Введём систему координат так, как показано на Рис. 1.

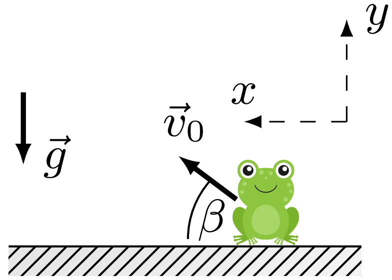

Рис. 1:

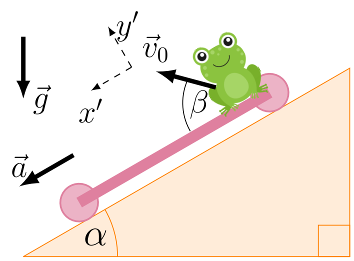

Рис. 2:

Вдоль оси x лягушка движется равномерно со скоростью $v_x = v_0 \cos\beta$. За один прыжок лягушка преодолевает расстояние

$$l_1 = v_x t_1, \tag{1}$$

где t_1 – время полёта. Вдоль оси y лягушка движется равноускоренно. Закон движения лягушки по оси y выглядит следующим образом:

$$y(t) = v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}, \tag{2}$$

где $v_{y0} = v_0 \sin\beta$ – проекция начальной скорости лягушки на ось y. Когда лягушка приземляется после прыжка, её координата $y(t)$ обращается в нуль. Определим время, за которое лягушка совершает прыжок:

$$t_1 = \frac{2v_{y0}}{g}. \tag{3}$$

По условию известно, что за N прыжков лягушка преодолевает расстояние, равное длине платформы. Тогда

$$L = Nl_1 = N\,\frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}. \tag{4}$$

Далее рассмотрим движение лягушки на платформе, которая движется по наклонной плоскости под углом α к горизонту. На платформу действуют сила тяжести и сила рекции опоры (трения нет по условию задачи). Воспользовавшись вторым законом Ньютона и записав его проекцию на направление движения платформы, определим ускорение платформы: $a = g\sin\alpha$. Отметим, что так как масса лягушки много меньше массы платформы, то можно пренебречь изменением скорости платформы в процессе прыжков лягушки. Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, связанную с платформой. Ускорение лягушки относительно неинерциальной системы отсчёта:

$$\vec{a}_{н} = \vec{a}_{и} - \vec{a}, \tag{5}$$

где $\vec{a}_{и}$ – ускорение лягушки относительно инерциальной системы отсчёта; $\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной системы отсчёта. Определим проекции ускорения лягушки на оси x' и y' в неинерциальной системе отсчёта:

$$a_{x'_{н}} = a_{x'_{и}} - a_{x'} = g\sin\alpha - g\sin\alpha = 0, \tag{6}$$

$$a_{y'_{н}} = a_{y'_{и}} - a_{y'} = -g\cos\alpha - 0 = -g\cos\alpha. \tag{7}$$

По оси x' за один прыжок лягушка преодолевает расстояние l_2, двигаясь равномерно со скоростью $v'_x = v_0\cos\beta$:

$$l_2 = v_{x'} t_2, \tag{8}$$

где t_2 – время полёта лягушки. Закон движения лягушки по оси y':

$$y'(t) = v_{y'0}t - \frac{g\cos\alpha\, t^2}{2}, \tag{9}$$

где $v_{y'0} = v_0 \sin\beta$ – проекция начальной скорости лягушки на ось y'.

Время, за которое лягушка совершает один прыжок, определяется аналогично предыдущему случаю. То есть, зная, что после прыжка координата $y'(t)$ обращается в нуль, получаем

$$t_2 = \frac{2v_{y'0}}{g\cos\alpha}. \tag{10}$$

Длина платформы может быть записана в виде:

$$L = N'l_2 = N'\frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g\cos\alpha}, \tag{11}$$

где N' – количество прыжков, за которое лягушка преодолеет платформу. Из (4) и (11) получим:

$$N' = N\cos\alpha. \tag{12}$$

С учётом того, что $N' \in \mathbb{N}$:

$$N' = \lceil N\cos\alpha \rceil \tag{13}$$

Ответ: $N' = \lceil N\cos\alpha \rceil$.

Задача 2.

Обозначим массу каждого груза m, коэффициент трения μ. Каждая из вертикальных нитей удерживает груз неподвижно, значит, сила их натяжения mg.

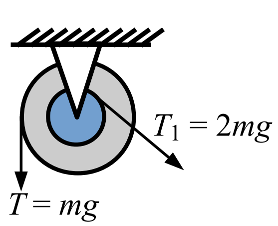

Рис. 3:

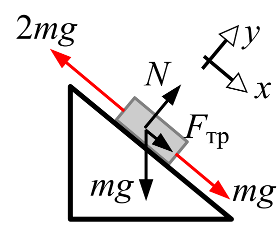

Рис. 4:

Рассмотрим равновесие верхнего блока. Силы, действующие на него и создающие ненулевой момент, представлены на Рис. 3. На него действуют две силы натяжения нити. Фактически, верхний блок представляет собой рычаг, плечи которого равны R и $2R$, поэтому сила натяжения наклонной нити в два раза больше, чем у вертикальной нити.

Теперь рассмотрим равновесие груза на клине. Действующие на него силы представлены на Рис. 4. Красными стрелками изображены две силы натяжения нитей, равные mg и $2mg$. Из равновесия в проекции на ось y следует $N = mg\cos\alpha$. Из равновесия вдоль оси x следует, что сила трения должна быть направлена вниз вдоль наклонной плоскости. В предельном случае, когда проекция силы трения максимальна и равна $F_{\text{тр}} = \mu N$, имеем

$$mg + mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 2mg.$$

Отсюда легко найти, что $\mu = (1 - \sin\alpha)/\cos\alpha$.

Легко также понять, что так как сила трения направлена вниз по наклонной плоскости, уменьшение трения ниже вычисленного порога приведёт к тому, что система грузов поедет вверх по наклонной плоскости: груз mg, висящий слева, сможет поднять два таких же груза при любом угле наклона клина.

Ответ: Коэффициент трения должен быть не меньше $\mu = (1 - \sin\alpha)/\cos\alpha$. Если он меньше, то система поедет влево.

Задача 3. В задаче дана губка высоты H с площадью сечения S. Она состоит из волокон материала, который имеет плотность $3\rho/2$, и пустот, которые в начальный момент заполнены водой плотности ρ. Внутри губки можно выделить два объёма: тот, что занят волокнами ($SH/2$), и тот, что в начальный момент занят водой ($SH/2$). Пусть $F(x)$ – вертикальная проекция переменной силы, которую прикладывают к губке, чтобы поднимать её с постоянной малой скоростью; x – высота надводной части губки, т. е. расстояние между верхним краем губки и поверхностью воды во внешнем сосуде. Тогда, пользуясь вторым законом Ньютона в проекции на вертикальную

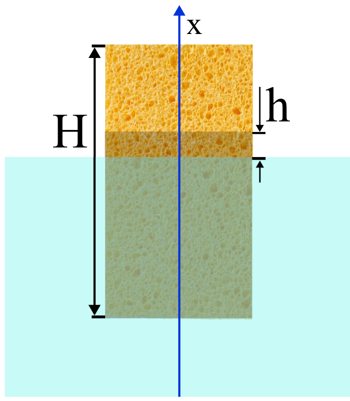

Рис. 5:

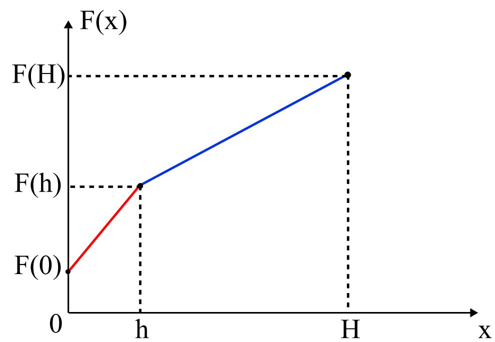

Рис. 6:

ось (Рис. 5), в начальный момент, при $x = 0$, можно записать равенство нулю суммы всех сил следующим образом:

$$F(0) - \frac{3}{4}\rho SHg - \frac{1}{2}\rho SHg + \rho SHg = 0. \tag{14}$$

Второе слагаемое здесь – сила тяжести, действующая на волокна губки, третье слагаемое – сила тяжести, действующая на воду, которая находится внутри губки, а последнее слагаемое соответствует силе Архимеда. Далее, из (14) очевидным образом следует

$$F(0) = \frac{1}{4}\rho gSH. \tag{15}$$

Весь процесс можно разделить на два этапа. Первый этап - поднятие губки до момента, когда верхний торец достигает высоты h. Затем, на втором этапе, губка поднимается уже до конца, когда верхний торец достигает высоты H. На обоих этапах силы будут представляться на графике линейными функциями от координаты верхнего торца и между этими этапами будет излом в момент $x = h$, так как в этот момент уровень воды в надводной части губки перестанет меняться. Тогда для нахождения работы, совершенной силой F в данном процессе, достаточно рассмотреть три положения: начальное; то, при котором верхний край губки оказывается на высоте h над уровнем воды; и конечное. Для первого положения значение силы F уже известно. Во втором положении выполняется следующее равенство:

$$F(h) = \rho gS\left(\frac{1}{4}H + h\right). \tag{16}$$

Вода в процессе подъёма до высоты h по условию ещё целиком заполняна губку, и в этой части процесса изменялась лишь сила Архимеда, действующая на губку, так как изменялся объём её части, погружённой в воду.

В конечном же положении $x = H$ вся губка находится над поверхностью воды, касаясь её лишь нижним краем, и внутри неё остаётся столб воды высотой h. Тогда сила F принимает следующее значение:

$$F(H) = \rho gS\left(\frac{3}{4}H + \frac{1}{2}h\right). \tag{17}$$

Легко понять, что в силу линейности сил на каждом из участков $0 \le x \le h$ и $h \le x \le H$ внешняя сила $F(x)$ изменяется, как показано на Рис. 6. Вывод о том, что $F(H) > F(h)$ сделан, исходя из того, что $H > h$ по условию. На рисунке красной линией изображено изменение силы F при движении губки между начальным и вторым положением. Синей линией – в процессе движения между вторым положением и конечным. Работу на каждом из этих этапов мы можем найти как площадь под соответствующим участком графика. Для обоих участков графика работа вычисляется из формулы для площади трапеции:

$$A_1 = \frac{F(h) + F(0)}{2}\, h = \left(\frac{1}{4}Hh + \frac{1}{2}h^2\right)\rho g S, \tag{18}$$

$$A_2 = \frac{F(H) + F(h)}{2}\,(H - h) = \left(\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{4}Hh - \frac{3}{4}h^2\right)\rho g S. \tag{19}$$

Тогда полная работа, совершённая в ходе процесса, вычисляется в виде суммы

$$A = A_1 + A_2 = \left(\frac{1}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}h^2\right)\rho g S. \tag{20}$$

Ответ: $A = \left[(1/2)Hh + (1/2)H^2 - (1/4)h^2\right]\rho g S$.

Задача 4.

Так как треугольник состоит из одинаковых резисторов, сопротивления между любой парой контактов у него одинаковы. Поэтому и звезда должна состоять из трёх одинаковых сопротивлений. Обозначим их величину r и будем называть «лучами звезды».

Запишем условие эквивалентности «треугольника» и «звезды», приравняв сопротивления между парой контактов у схемы А (оно равно $2R/3$) и схемы Б (оно равно $2r$). Получим соотношение $r = R/3$. Полезно запомнить, что даже если «треугольник» состоял бы из трёх разных сопротивлений, существовала бы эквивалентная ему «звезда», величины сопротивлений которой несложно найти, записав три условия эквивалентности для каждой пары контактов.

Так как схемы "треугольник"и "звезда"эквивалентны, можно считать, что Митрофан припаял к контатам не «треугольник» и «звезду», а две одинаковые «звезды» с лучами r. Так как каждый луч «звезды» теперь сдвоен, полученную схему можно представить себе как «звезду», лучи которой состоят из двух параллельно соединённых сопротивлений r. Значит, сопротивление каждого луча суммарной «звезды» будет $r/2$, а сопротивление всей схемы $2(r/2) = r = R/3$. Это ответ на первый вопрос задачи.

После того, как «звезду» перепаяли в «треугольник» из сопротивлений r, проще заменить его мысленно на эквивалентную «звезду». Мы уже умеем считать эквивалетнтое сопротивление лучей «звезды», оно будет равно $r/3$. Скомбинировав такую «звезду» и «звезду» с лучами R, Митрофан получит «звезду», луч которой представляет собой параллельное сопротивление резисторов R и $r/3 = R/9$, то есть равно $R/10$. Сопротивление между двумя контактами будет в два раза больше этой величины, т. е. $R/5$.

Ответ: В первом случае $R/3$. Во втором случае сопротивление будет отличаться в $3/5$ раза и будет равно $R/5$.

Задача 5.

В процессе движения на брусок действуют три силы: сила тяжести mg, сила реакции опоры N и сила трения скольжения μN, направленная противоположно движению. В вертикальной проекции сумма всех сил равна нулю, а значит, $N = mg$. Тогда сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Из-за наличия силы трения кинетическая энергия бруска постепенно переходит в тепловую энергию, которая по условию целиком поглощается бруском. Изменение температуры ΔT при перемещении на Δx определяется работой силы трения и теплоёмкостью бруска. Считая ΔT и Δx достаточно малыми, что можно пренебречь изменениями значения $\mu(T)$ на промежутке пути Δx, запишем следующее равенство:

$$C\Delta T = \mu mg\Delta x. \tag{21}$$

Тогда, воспользовавшись зависимостью коэффициента трения от температуры бруска $\mu(T) = \alpha/(T + \beta)$, можно получить

$$\frac{T + \beta}{\alpha}\,\Delta T = \frac{mg}{C}\,\Delta x. \tag{22}$$

Рассмотрим изменение температуры от начального значения $T = 0\,^\circ\mathrm{C}$ до некоторого $T(x)$, при котором путь, пройденный бруском, достиг значения x. Для решения задачи нам достаточно установить вид функции $T(x)$. Это можно сделать, если просуммировать соотношение (22) для всех малых участков Δx и ΔT. В правой части мы имеем постоянный множитель mg/C и сумму всех Δx, которая, очевидно, равна полному пути x. В левой части интересующая нас сумма отвечает площади под графиком линейной функции $f(T) = T+\beta$, делённой на константу α. Фигура под графиком – это трапеция с высотой $T(x)$ и основаниями β и $T(x)+\beta$. В итоге получаем

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}\Big[T(x)+2\beta\Big]T(x) = \frac{mg}{C}x. \tag{23}$$

Заметим, что данное уравнение можно было также получить, проведя аналогию между соотношением (22) и формулой $(v_0+at)\Delta t = \Delta x$ из кинематики равноускоренного движения, которая позволяет записать $x = x_0+v_0t+at^2/2$.

Теперь выражение (23) можно записать для интересующих нас положений. Подставляя $x = L$ и $T(x) = T_{\text{к}}$, получаем

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{T_{\text{к}}^2}{2}+\beta T_{\text{к}}\right) = \frac{mg}{C}L. \tag{24}$$

Теперь подставим $x = L/2$ и $T(x) = T_*$, где T_* – искомая температура:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{T_*^2}{2}+\beta T_*\right) = \frac{mg}{C}\frac{L}{2}. \tag{25}$$

Далее, если поделить правую и левую части соотношения (25) на соответствующие части (24), то можно получить квадратное уравнение относительно T_*:

$$T_*^2+2\beta T_*-\left(\frac{T_{\text{к}}^2}{2}+\beta T_{\text{к}}\right) = 0. \tag{26}$$

Данное уравнение имеет единственный положительный корень:

$$T_* = \sqrt{\beta^2+\beta T_{\text{к}}+T_{\text{к}}/2}-\beta. \tag{27}$$

Ответ: $T_* = \sqrt{\beta^2+\beta T_{\text{к}}+T_{\text{к}}/2}-\beta$.