

Районный тур 2024/25. 10 класс. I вариант

Задача 1.

На систему не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, поэтому проекция полного импульса сохраняется. Запишем закон сохранения импульса в проекции ось x :

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Учитывая, что $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$, получим:

$$v_1 = 2v_2.$$

В силу того, что шарик соскальзывает без трения, а удар о пол абсолютно упругий, выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E_{\text{п1}} = E'_{\text{п1}} + E_{\text{к1}} + E_{\text{к2}},$$

где $E_{\text{п1}}$ — потенциальная энергия верхнего шарика до соскальзывания, $E'_{\text{п1}}$ — потенциальная энергия верхнего шарика на высоте h , $E_{\text{к1}}$ — кинетическая энергия верхнего шарика, $E_{\text{к2}}$ — кинетическая энергия нижнего шарика. Напишем явно:

$$m_1 g 2R = m_1 g h + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Отсюда получим v_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{(2R - h)g}{3}}.$$

Ответ: $v_2 = \sqrt{(2R - h)g/3}$.

Задача 2.

Примечание. На рис. б) в условии задачи была допущена ошибка: последовательно соединённые сопротивления должны были располагаться в порядке $R_1 - R_4 - R_3 - R_2$, а не $R_1 - R_2 - R_3 - R_4$. В результате ответ задачи не изменился, но условие оказалось избыточным. Задачу можно решить, используя только тот факт, что показания амперметра совпадают, если замкнуть точки D и E или E и F. Рассмотрим соответствующее решение:

Поскольку показания амперметра будут одинаковыми, если замкнуть точки D и E или E и F, заключаем, что

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4.$$

Сопротивление схемы на рис. а равно

$$R_a = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Сопротивление схемы на рис. б равно

$$R_6 = (R_1 + R_2) + (R_3 + R_4) = 2(R_1 + R_2).$$

Обозначим напряжение источника U . Определим мощность тепловыделения в каждой цепи:

$$P_a = \frac{U^2}{R_a} = \frac{2U^2}{R_1 + R_2}, \quad (1)$$

$$P_6 = \frac{U^2}{R_6} = \frac{U^2}{2(R_1 + R_2)}. \quad (2)$$

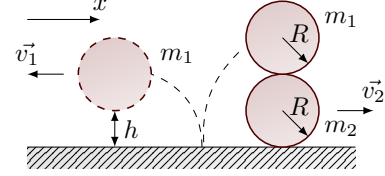


Рис. 1

Из (1) и (2) получаем, что $P_a/P_6 = 4$.

Примечание. Для полноты изложения рассмотрим также решение изначально задуманной задачи:

По условию известно, что при закорачивании точек А и В показания амперметра не изменяются, значит, $R_1 = 0$. Рассмотрим закорачивание точек В и С. Так как показания амперметра также не изменяются, то схема представляет собой “сбалансированный мост”. Из условия баланса $R_1/R_2 = R_3/R_4$ с учётом $R_1 = 0$ следует, что $R_3 = 0$.

Так как $R_1 = R_3 = 0$, то эти сопротивления можно заменить соединительными проводами. Тогда на основании того, что при закорачивании точек D и E или E и F показания амперметра совпадают, можно сделать вывод о том, что сопротивления R_2 и R_4 равны. Обозначим $R_2 = R_4 = R$.

Найдём общее сопротивление цепи на рис. а:

$$R_a = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{R}{2}.$$

Найдём общее сопротивление цепи на рис. б:

$$R_6 = R_2 + R_4 = 2R.$$

Обозначим напряжение источника U . Определим мощность тепловыделения в каждой цепи:

$$P_a = \frac{U^2}{R_a} = \frac{2U^2}{R}, \quad (3)$$

$$P_6 = \frac{U^2}{R_6} = \frac{U^2}{2R}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем, что $P_a/P_6 = 4$.

Ответ: Отношение мощностей тепловыделения равно 4.

Задача 3.

По условию задачи качение происходит без проскальзывания (для определенности будем считать, что тело катится вправо). Это означает, что скорость точки тела С, которая в данный момент времени касается поверхности, равна нулю. В противном случае ненулевая вертикальная компонента скорости точки С означала бы ее отрыв от поверхности, а ненулевая горизонтальная компонента — относительное движение вдоль поверхности, то есть скольжение. Поскольку тело жесткое, скорости точек А и В перпендикулярны прямым СА и СВ соответственно (см. Рис. 2). Если бы это было не так, то изменялось бы расстояние между точками С и А или С и В, что невозможно в силу жесткости рассматриваемого тела. Более того, мы можем сказать, что в течение малого интервала времени тело вращается вокруг оси С (мгновенная ось вращения). Тогда можно записать соотношения

$$v_A = \omega CA,$$

$$v_B = \omega CB,$$

где ω — угловая скорость вращения. Отсюда получаем

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{CA}{CB}.$$

Заметим, что это соотношение не зависит от направления качения тела.

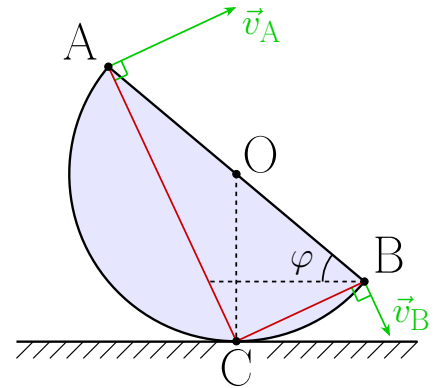


Рис. 2

Теперь осталось выразить отношение длин отрезков СА и СВ через угол φ . Заметим сначала, что $\angle BOC = \pi/2 - \varphi$ и тогда $\angle AOC = \pi - \angle BOC = \pi/2 + \varphi$. С учетом $OA = OB = OC = R$ можем воспользоваться теоремой косинусов для треугольников АОС и ВОС:

$$\begin{aligned} CA^2 &= 2R^2(1 - \cos \angle AOC) = 2R^2(1 + \sin \varphi), \\ CB^2 &= 2R^2(1 - \cos \angle BOC) = 2R^2(1 - \sin \varphi), \end{aligned}$$

В результате мы приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (5)$$

По условию задачи $v_A/v_B = 2 + \sqrt{3}$, что позволяет записать

$$7 + 4\sqrt{3} = \frac{2}{1 - \sin \varphi} - 1 \implies 1 - \sin \varphi = \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \varphi = 60^\circ.$$

Отметим, что данный ответ можно было получить и другими способами. Например, можно было сказать, что искомое отношение СА/СВ — это тангенс угла АВС в прямоугольном треугольнике АВС (угол АСВ опирается на диаметр). Из треугольника ОВС легко найти $\angle ABC = \angle OBC = \angle AOC/2 = \pi/4 + \varphi/2$. Уравнение

$$\frac{v_A}{v_B} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (6)$$

эквивалентно уравнению (5) (можно заменить $\sin \varphi$ на $-\cos(\pi/2 + \varphi)$ и воспользоваться тождеством для косинуса двойного угла). Далее в (6) легко провести вычисления с использованием тождества для тангенса суммы и прийти к $\operatorname{tg}(\varphi/2) = 1/\sqrt{3}$. Наконец, отметим, что уравнение (6) можно было сразу решить с использованием функции “арктангенс” на калькуляторе.

Ответ: $\varphi = 60^\circ$.

Задача 4.

При попадании луча на границу раздела двух прозрачных сред в общем случае он разделяется на два луча: отраженный и преломленный. Отражение происходит таким образом, что угол падения равен углу отражения. Преломление происходит согласно закону Снеллиуса:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (7)$$

где n_1 — показатель преломления среды, из которой свет падает на границу раздела; θ_1 — угол падения; n_2 — показатель преломления среды, в которую свет попадает, пройдя границу раздела; θ_2 — угол преломления света. Какая конкретно часть луча отразится, а какая пройдет через границу раздела, зависит от угла падения, коэффициентов преломления, а также от поляризации света (свет — это поперечная электромагнитная волна, а его поляризация — это некая характеристика, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). Однако знание этих “тонкостей” не является необходимым для решения данной задачи. Существенным оказывается только понимание такого явления, как *полное внутреннее отражение*. При падении луча из среды оптически более плотной в среду оптически

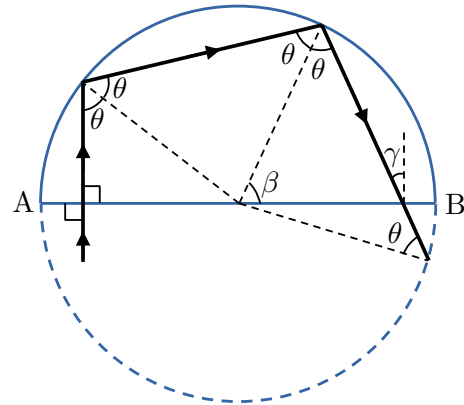


Рис. 3

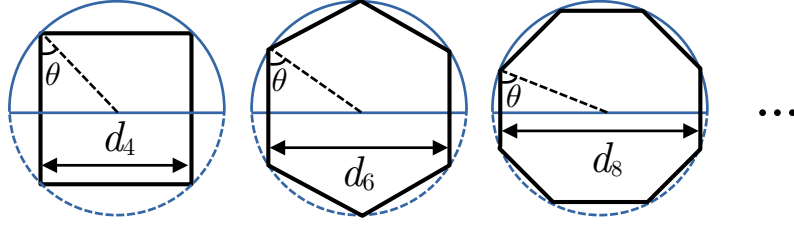


Рис. 4

менее плотную ($n_1 > n_2$) при углах падения, превышающих критическое значение $\arcsin(n_2/n_1)$, никакая часть луча не проходит через границу: луч *полностью* отражается.

Перейдем к решению задачи.

По условию экспериментатор направляет луч лазера на полудиск перпендикулярно плоской грани АВ (см. Рис. 3). Следовательно, угол падения равен $\pi/2$. Вообще говоря, часть луча сразу отражается назад, но нас интересует луч, который, пройдя через толщу диска, вышел из него в обратном направлении. Поэтому проследим за лучом, прошедшим внутрь диска. Согласно (7), он также будет направлен перпендикулярно АВ. Экспериментатор не хочет, чтобы какая-то часть луча проходила через круглую сторону диска. Поэтому прошедший в диск луч должен падать на соответствующую границу раздела под углом θ не меньшим, чем $\theta_0 = \arcsin(1/n)$, то есть $\theta \geq \theta_0$ и $\sin \theta \geq 1/n$. При выполнении этого условия будет происходить полное внутреннее отражение, и луч лазера не будет выходить наружу. Заметим, что при $n = 1,35$ справедливо неравенство $1/n > 1/\sqrt{2}$, поэтому $\theta_0 > \pi/4$. С другой стороны, $1/n < \sqrt{3}/2$, следовательно, $\theta_0 < \pi/3$. Так как $\theta \geq \theta_0 > \pi/4$, полностью отраженный луч обязательно во второй раз достигнет круглой границы диска. При этом угол падения также будет равен θ , а значит, луч вновь испытает полное внутреннее отражение. Далее луч либо сразу попадет на границу раздела АВ, либо прежде претерпит еще ряд полных внутренних отражений на круглой границе. Легко понять, что при любом раскладе угол падения луча на границу АВ оказывается меньше критического угла θ_0 , то есть часть луча обязательно выйдет наружу. Действительно, из Рис. 3 видно (для удобства дорисована вторая половина окружности), что

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta - \beta) = \theta + \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Но $\beta < \pi - 2\theta$, а значит, $\gamma < \pi/2 - \theta \leq \pi/2 - \theta_0$. Отсюда, с учетом того, что $\theta_0 > \pi/4$, получаем, что $\gamma < \theta_0$.

Таким образом, испытав минимум два полных внутренних отражения внутри полудиска, луч может выйти из него назад через границу АВ. Однако, если угол γ не равен нулю, вышедший луч не будет параллелен исходному, что требуется по условию. Не составляет труда понять, что угол γ будет равен нулю, если траектория луча представляет собой часть вписанного в окружность правильного многоугольника с четным числом сторон $N = 4, 6, \dots$, см. Рис. 4. Угол падения луча на круглую границу раздела при этом будет равен $\theta = \pi/2 - \pi/N$. Как следует из сделанных выше оценок, случай $N = 4$ не подходит, так как в этом случае $\theta < \theta_0$, и полного внутреннего отражения не будет. Напротив, все остальные случаи $N = 6, 8, \dots$ удовлетворяют требованию $\theta > \theta_0$. На Рис. 4 обозначены возможные значения смещений вышедшего луча относительно исходного для разных N : $d_N = 2R \cos(\pi/N)$. Видно, что с увеличением числа сторон N , смещение d_N увеличивается. Таким образом, искомое минимальное смещение равно $d = d_6 = \sqrt{3}R$.

Ответ: минимальное смещение луча при развороте на 180° в результате прохождения прозрачного полудиска равно $\sqrt{3}R$.

Задача 5.

На первом этапе решения задачи выясним, какую температуру имели различные точки пластины до ее разрезания. Введем декартовы координаты, как показано на Рис. 5, и будем считать, что сторона пластины равна a . Обозначим за $T(x, y)$ температуру пластины в точке с координатами (x, y) . В силу однородности системы в рассматриваемом равновесии функция $T(x, y)$ не зависит от координаты y . Найдем теперь зависимость температуры $T(x)$. Для определенности будем считать, что $T_1 > T_2$. За счет теплопроводности тепло переходит от левого края пластины $x = 0$ к ее правому краю $x = a$. Чтобы при этом температуры точек пластины не менялись, к левому краю требуется постоянно подводить тепло, а от правого края его

забирать. Пусть за малый промежуток времени Δt была передана энергия ΔQ . Из условия теплового баланса (закона сохранения энергии) следует, что ровно такое же количество теплоты прошло за время Δt через *каждое* сечение пластины, параллельное оси y . Рассмотрим теперь тонкую полоску между произвольным значением x и близким ему $x + \Delta x$, которая изображена на Рис. 5 штриховыми линиями. Мощность теплопередачи за счет теплопроводности пропорциональна разности температур $\Delta T \equiv T(x + \Delta x) - T(x)$ и обратно пропорциональна ширине полоски Δx , что позволяет записать

$$\Delta Q \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Коэффициент пропорциональности определяется материалом пластины, ее толщиной и высотой a , то есть не зависит от координат. С учетом постоянства ΔQ мы приходим к выводу, что на каждом малом участке Δx температура изменяется на одно и то же значение ΔT вне зависимости от того, где располагается рассматриваемый участок. Это означает, что функция $T(x)$ является *линейной*. Используя условия $T(0) = T_1$ и $T(a) = T_2$, получаем

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{a}. \quad (8)$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй части задачи, где верхний треугольник на Рис. 5 отрезают от нижнего и теплоизолируют. Для нахождения равновесной температуры T_* опять воспользуемся уравнением теплового баланса. Разобьем треугольник на маленькие квадратики площадью ΔS_i , где i — номер квадратика. Координаты центра i -го квадратика обозначим (x_i, y_i) . Для общности проведем дальнейшие рассуждения для произвольного распределения температуры $T(x, y)$ в начальный момент (до разрезания пластины). Температура квадратика при переходе к равновесию изменяется от значения $T(x_i, y_i)$ до T_* . Это означает, что каждый квадратик получает (или отдает в зависимости от знака) количество теплоты

$$\Delta Q_i = \sigma \Delta S_i [T_* - T(x_i, y_i)],$$

где коэффициент σ является произведением удельной теплоемкости материала пластины, его плотности, а также толщины пластины. Важно, что σ не зависит от координат, то есть не имеет значка i . Относительно горячие участки треугольника охлаждаются, отдавая тепло ($\Delta Q_i < 0$), а относительно холодные — нагреваются, получая его ($\Delta Q_i > 0$). Условие сохранения энергии означает, что суммарная переданная теплота в система равна нулю:

$$\sum_i \Delta Q_i \equiv \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots = 0.$$

В результате мы приходим к уравнению

$$\sum_i \Delta S_i [T_* - T(x_i, y_i)] = 0.$$

Раскроем скобки. В первом слагаемом T_* не зависит от i , так что требуется просуммировать все ΔS_i , что, очевидно, дает площадь треугольника $S = a^2/2$. Тогда можно записать

$$T_* = \frac{1}{S} \sum_i T(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Операцию в правой части уравнения называют усреднением функции $T(x, y)$ и часто обозначают $\langle T(x, y) \rangle$ или кратко $\langle T \rangle$. Таким образом, конечная (равновесная) температура полностью теплоизолированного тела совпадает со средним значением исходного распределения температуры. Понятие среднего вам хорошо знакомо, например, из кинематики, где средняя скорость за некоторый промежуток времени t вычисляется по формуле “весь путь делить на все время”:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t} \sum_i v(t_i) \Delta t_i = \frac{1}{t} \sum_i \Delta s_i = \frac{s}{t}.$$

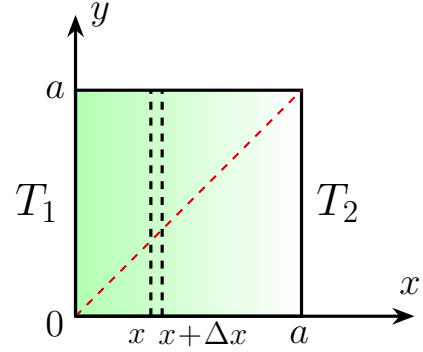


Рис. 5

Теперь произведем усреднение функции $T(x, y) = T(x)$, заданной уравнением (8). Из определения среднего легко понять, что оно линейно, то есть среднее суммы равно сумме средних и умножение функции на число при усреднении эквивалентно умножению среднего на это же число (при этом среднее значение константы равно самой константе). В итоге можно записать:

$$T_* = \langle T_1 + (T_2 - T_1) (x/a) \rangle = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\langle x \rangle}{a}. \quad (9)$$

Задача свелась к нахождению среднего значения координаты x в рассматриваемом треугольнике. Запишем по определению:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{S} \sum_i x_i \Delta S_i.$$

Заметим теперь, что выражение в правой части совпадает с определением координаты центра масс тела

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta M_i$$

с учетом простого соотношения $\Delta M_i = \rho \Delta S_i$, где ρ — масса куска пластины единичной площади. В итоге мы можем переписать (9) в виде

$$T_* = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x_c}{a}, \quad (10)$$

где осталось определить координату центра масс x_c верхнего треугольника. Как известно, центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Медиана, проведенная из вершины прямого угла нашего треугольника, совпадает с высотой и имеет длину $a/\sqrt{2}$. Тогда расстояние от вершины прямого угла до центра масс равно $(2/3)(a/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/3)a$. Проектируя радиус-вектор центра масс на ось x , получаем

$$x_c = \frac{a}{3}.$$

В результате выражение (10) принимает вид

$$T_* = T_1 + \frac{1}{3} (T_2 - T_1) = \frac{2}{3} T_1 + \frac{1}{3} T_2.$$

Ответ: конечная температура верхней половины пластины равна $T_* = 2T_1/3 + T_2/3$.

Районный тур 2024/25. 10 класс. II вариант

Задача 1.

На систему не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, поэтому проекция полного импульса сохраняется. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x :

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Учитывая, что $m_1 = m$ и $m_2 = 3m$, получим:

$$v_1 = 3v_2.$$

В силу того, что шарик соскальзывает без трения, а удар о пол абсолютно упругий, выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E_{\text{п1}} = E'_{\text{п1}} + E_{\text{к1}} + E_{\text{к2}},$$

где $E_{\text{п1}}$ — потенциальная энергия верхнего шарика до соскальзывания, $E'_{\text{п1}}$ — потенциальная энергия верхнего шарика на высоте h , $E_{\text{к1}}$ — кинетическая энергия верхнего шарика, $E_{\text{к2}}$ — кинетическая энергия нижнего шарика. Напишем явно:

$$m_1 g 2R = m_1 g h + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Отсюда получим v_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{(2R - h)g}{6}}.$$

Ответ: $v_2 = \sqrt{(2R - h)g/6}$.

Задача 2.

Примечание. На рис. б) в условии задачи была допущена ошибка: последовательно соединённые сопротивления должны были располагаться в порядке $R_1 - R_4 - R_3 - R_2$, а не $R_1 - R_2 - R_3 - R_4$. В результате ответ задачи не изменился, но условие оказалось избыточным. Задачу можно решить, используя только тот факт, что показания амперметра совпадают, если замкнуть точки D и E или E и F. Рассмотрим соответствующее решение:

Поскольку показания амперметра будут одинаковыми, если замкнуть точки D и E или E и F, заключаем, что

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4.$$

Сопротивление схемы на рис. а равно

$$R_a = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Сопротивление схемы на рис. б равно

$$R_6 = (R_1 + R_2) + (R_3 + R_4) = 2(R_1 + R_2).$$

Обозначим напряжение источника U . Определим мощность тепловыделения в каждой цепи:

$$P_a = \frac{U^2}{R_a} = \frac{2U^2}{R_1 + R_2}, \quad (11)$$

$$P_6 = \frac{U^2}{R_6} = \frac{U^2}{2(R_1 + R_2)}. \quad (12)$$

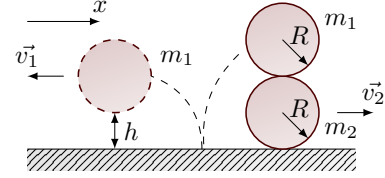


Рис. 6

Из (11) и (12) получаем, что $P_a/P_6 = 4$.

Примечание. Для полноты изложения рассмотрим также решение изначально задуманной задачи:

По условию известно, что при закорачивании точек А и В показания амперметра не изменяются, значит, $R_2 = 0$. Рассмотрим закорачивание точек А и С. Так как показания амперметра также не изменяются, то схема представляет собой “сбалансированный мост”. Из условия баланса $R_2/R_1 = R_4/R_3$ с учётом $R_2 = 0$, следует, что $R_4 = 0$.

Так как $R_2 = R_4 = 0$, то эти сопротивления можно заменить соединительными проводами. Тогда на основании того, что при закорачивании точек D и E или E и F показания амперметра совпадают, можно сделать вывод о том, что сопротивления R_1 и R_3 равны. Обозначим $R_1 = R_3 = R$.

Найдём общее сопротивление цепи на рис. а:

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R}{2}.$$

Найдём общее сопротивление цепи на рис. б:

$$R_6 = R_1 + R_3 = 2R.$$

Обозначим напряжение источника U . Определим мощность тепловыделения в каждой цепи:

$$P_a = \frac{U^2}{R_a} = \frac{2U^2}{R}, \quad (13)$$

$$P_6 = \frac{U^2}{R_6} = \frac{U^2}{2R}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем, что $P_a/P_6 = 4$.

Ответ: Отношение мощностей тепловыделения равно 4.

Задача 3.

По условию задачи качение происходит без проскальзывания (для определенности будем считать, что тело катится вправо). Это означает, что скорость точки тела С, которая в данный момент времени касается поверхности, равна нулю. В противном случае ненулевая вертикальная компонента скорости точки С означала бы ее отрыв от поверхности, а ненулевая горизонтальная компонента — относительное движение вдоль поверхности, то есть скольжение. Поскольку тело жесткое, скорости точек А и В перпендикулярны прямым СА и СВ соответственно (см. Рис. 7). Если бы это было не так, то изменялось бы расстояние между точками С и А или С и В, что невозможно в силу жесткости рассматриваемого тела. Более того, мы можем сказать, что в течение малого интервала времени тело вращается вокруг оси С (мгновенная ось вращения). Тогда можно записать соотношения

$$v_A = \omega CA,$$

$$v_B = \omega CB,$$

где ω — угловая скорость вращения. Отсюда получаем

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{CB}{CA}.$$

Заметим, что это соотношение не зависит от направления качения тела.

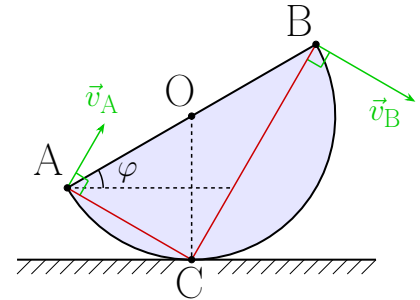


Рис. 7

Теперь осталось выразить отношение длин отрезков СА и СВ через угол φ . Заметим сначала, что $\angle AOC = \pi/2 - \varphi$ и тогда $\angle BOC = \pi - \angle AOC = \pi/2 + \varphi$. С учетом $OA = OB = OC = R$ можем воспользоваться теоремой косинусов для треугольников AOC и BOC:

$$\begin{aligned} CA^2 &= 2R^2(1 - \cos \angle AOC) = 2R^2(1 - \sin \varphi), \\ CB^2 &= 2R^2(1 - \cos \angle BOC) = 2R^2(1 + \sin \varphi), \end{aligned}$$

В результате мы приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (15)$$

По условию задачи $v_B/v_A = 1 + \sqrt{2}$, что позволяет записать

$$3 + 2\sqrt{2} = \frac{2}{1 - \sin \varphi} - 1 \implies 1 - \sin \varphi = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = 45^\circ.$$

Отметим, что данный ответ можно было получить и другими способами. Например, можно было сказать, что искомое отношение CB/CA — это тангенс угла BAC в прямоугольном треугольнике ABC (угол ACB опирается на диаметр). Из треугольника OAC легко найти $\angle BAC = \angle OAC = \angle BOC/2 = \pi/4 + \varphi/2$. Уравнение

$$\frac{v_B}{v_A} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (16)$$

эквивалентно уравнению (15) (можно заменить $\sin \varphi$ на $-\cos(\pi/2 + \varphi)$ и воспользоваться тождеством для косинуса двойного угла). Далее в (16) легко провести вычисления с использованием тождества для тангенса суммы и прийти к $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \sqrt{2} - 1$, что дает $\operatorname{tg} \varphi = 1$ из формулы тангенса двойного угла. Наконец, отметим, что уравнение (16) можно было сразу решить с использованием функции “арктангенс” на калькуляторе.

Ответ: $\varphi = 45^\circ$.

Задача 4.

При попадании луча на границу раздела двух прозрачных сред в общем случае он разделяется на два луча: отраженный и преломленный. Отражение происходит таким образом, что угол падения равен углу отражения. Преломление происходит согласно закону Снеллиуса:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (17)$$

где n_1 — показатель преломления среды, из которой свет падает на границу раздела; θ_1 — угол падения; n_2 — показатель преломления среды, в которую свет попадает, пройдя границу раздела; θ_2 — угол преломления света. Какая конкретно часть луча отразится, а какая пройдет через границу раздела, зависит от угла падения, коэффициентов преломления, а также от поляризации света (свет — это поперечная электромагнитная волна, а его поляризация — это некая характеристика, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). Однако знание этих “тонкостей” не является необходимым для решения данной задачи. Существенным оказывается только понимание такого явления, как *полное внутреннее отражение*. При падении луча из среды оптически более плотной в среду оптически

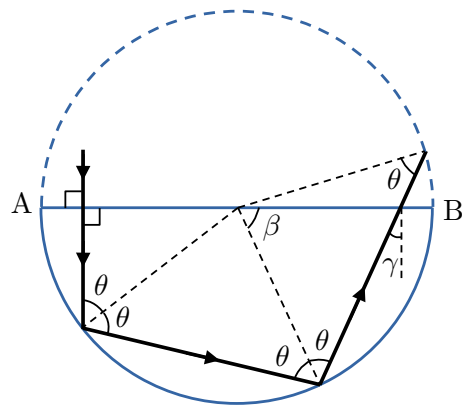


Рис. 8

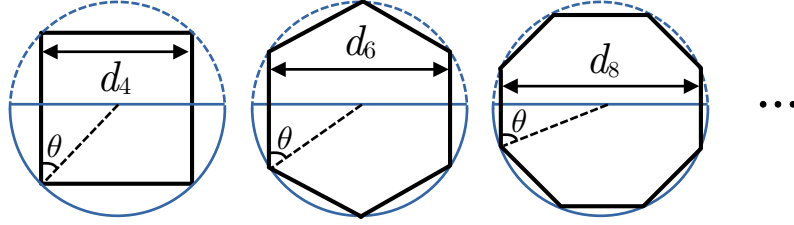


Рис. 9

менее плотную ($n_1 > n_2$) при углах падения, превышающих критическое значение $\arcsin(n_2/n_1)$, никакая часть луча не проходит через границу: луч *полностью* отражается.

Перейдем к решению задачи.

По условию экспериментатор направляет луч лазера на полудиск перпендикулярно плоской грани АВ (см. Рис. 8). Следовательно, угол падения равен $\pi/2$. Вообще говоря, часть луча сразу отражается назад, но нас интересует луч, который, пройдя через толщу диска, вышел из него в обратном направлении. Поэтому проследим за лучом, прошедшим внутрь диска. Согласно (17), он также будет направлен перпендикулярно АВ. Экспериментатор не хочет, чтобы какая-то часть луча проходила через круглую сторону диска. Поэтому прошедший в диск луч должен падать на соответствующую границу раздела под углом θ не меньшим, чем $\theta_0 = \arcsin(1/n)$, то есть $\theta \geq \theta_0$ и $\sin \theta \geq 1/n$. При выполнении этого условия будет происходить полное внутреннее отражение, и луч лазера не будет выходить наружу. Заметим, что при $n = 1,33$ справедливо неравенство $1/n > 1/\sqrt{2}$, поэтому $\theta_0 > \pi/4$. С другой стороны, $1/n < \sqrt{3}/2$, следовательно, $\theta_0 < \pi/3$. Так как $\theta \geq \theta_0 > \pi/4$, полностью отраженный луч обязательно во второй раз достигнет круглой границы диска. При этом угол падения также будет равен θ , а значит, луч вновь испытает полное внутреннее отражение. Далее луч либо сразу попадет на границу раздела АВ, либо прежде претерпит еще ряд полных внутренних отражений на круглой границе. Легко понять, что при любом раскладе угол падения луча на границу АВ оказывается меньше критического угла θ_0 , то есть часть луча обязательно выйдет наружу. Действительно, из Рис. 8 видно (для удобства дорисована вторая половина окружности), что

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta - \beta) = \theta + \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Но $\beta < \pi - 2\theta$, а значит, $\gamma < \pi/2 - \theta \leq \pi/2 - \theta_0$. Отсюда, с учетом того, что $\theta_0 > \pi/4$, получаем, что $\gamma < \theta_0$.

Таким образом, испытав минимум два полных внутренних отражения внутри полудиска, луч может выйти из него назад через границу АВ. Однако, если угол γ не равен нулю, вышедший луч не будет параллелен исходному, что требуется по условию. Не составляет труда понять, что угол γ будет равен нулю, если траектория луча представляет собой часть вписанного в окружность правильного многоугольника с четным числом сторон $N = 4, 6, \dots$, см. Рис. 9. Угол падения луча на круглую границу раздела при этом будет равен $\theta = \pi/2 - \pi/N$. Как следует из сделанных выше оценок, случай $N = 4$ не подходит, так как в этом случае $\theta < \theta_0$, и полного внутреннего отражения не будет. Напротив, все остальные случаи $N = 6, 8, \dots$ удовлетворяют требованию $\theta > \theta_0$. На Рис. 9 обозначены возможные значения смещений вышедшего луча относительно исходного для разных N : $d_N = 2R \cos(\pi/N)$. Видно, что с увеличением числа сторон N , смещение d_N увеличивается. Таким образом, искомое минимальное смещение равно $d = d_6 = \sqrt{3}R$.

Ответ: минимальное смещение луча при развороте на 180° в результате прохождения прозрачного полудиска равно $\sqrt{3}R$.

Задача 5.

На первом этапе решения задачи выясним, какую температуру имели различные точки пластины до ее разрезания. Введем декартовы координаты, как показано на Рис. 10, и будем считать, что сторона пластины равна a . Обозначим за $T(x, y)$ температуру пластины в точке с координатами (x, y) . В силу однородности системы в рассматриваемом равновесии функция $T(x, y)$ не зависит от координаты y . Найдем теперь зависимость температуры $T(x)$. Для определенности будем считать, что $T_1 > T_2$. За счет теплопроводности тепло переходит от левого края пластины $x = 0$ к ее правому краю $x = a$. Чтобы при этом температуры точек пластины не менялись, к левому краю требуется постоянно подводить тепло, а от правого края его

забирать. Пусть за малый промежуток времени Δt была передана энергия ΔQ . Из условия теплового баланса (закона сохранения энергии) следует, что ровно такое же количество теплоты прошло за время Δt через *каждое* сечение пластины, параллельное оси y . Рассмотрим теперь тонкую полоску между произвольным значением x и близким ему $x + \Delta x$, которая изображена на Рис. 10 штриховыми линиями. Мощность теплопередачи за счет теплопроводности пропорциональна разности температур $\Delta T \equiv T(x + \Delta x) - T(x)$ и обратно пропорциональна ширине полоски Δx , что позволяет записать

$$\Delta Q \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Коэффициент пропорциональности определяется материалом пластины, ее толщиной и высотой a , то есть не зависит от координат. С учетом постоянства ΔQ мы приходим к выводу, что на каждом малом участке Δx температура изменяется на одно и то же значение ΔT вне зависимости от того, где располагается рассматриваемый участок. Это означает, что функция $T(x)$ является *линейной*. Используя условия $T(0) = T_1$ и $T(a) = T_2$, получаем

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{a}. \quad (18)$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй части задачи, где нижний треугольник на Рис. 10 отрезают от верхнего и теплоизолируют. Для нахождения равновесной температуры T_* опять воспользуемся уравнением теплового баланса. Разобьем треугольник на маленькие квадратики площадью ΔS_i , где i — номер квадратика. Координаты центра i -го квадратика обозначим (x_i, y_i) . Для общности проведем дальнейшие рассуждения для произвольного распределения температуры $T(x, y)$ в начальный момент (до разрезания пластины). Температура квадратика при переходе к равновесию изменяется от значения $T(x_i, y_i)$ до T_* . Это означает, что каждый квадратик получает (или отдает в зависимости от знака) количество теплоты

$$\Delta Q_i = \sigma \Delta S_i [T_* - T(x_i, y_i)],$$

где коэффициент σ является произведением удельной теплоемкости материала пластины, его плотности, а также толщины пластины. Важно, что σ не зависит от координат, то есть не имеет значка i . Относительно горячие участки треугольника охлаждаются, отдавая тепло ($\Delta Q_i < 0$), а относительно холодные — нагреваются, получая его ($\Delta Q_i > 0$). Условие сохранения энергии означает, что суммарная переданная теплота в система равна нулю:

$$\sum_i \Delta Q_i \equiv \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots = 0.$$

В результате мы приходим к уравнению

$$\sum_i \Delta S_i [T_* - T(x_i, y_i)] = 0.$$

Раскроем скобки. В первом слагаемом T_* не зависит от i , так что требуется просуммировать все ΔS_i , что, очевидно, дает площадь треугольника $S = a^2/2$. Тогда можно записать

$$T_* = \frac{1}{S} \sum_i T(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Операцию в правой части уравнения называют усреднением функции $T(x, y)$ и часто обозначают $\langle T(x, y) \rangle$ или кратко $\langle T \rangle$. Таким образом, конечная (равновесная) температура полностью теплоизолированного тела совпадает со средним значением исходного распределения температуры. Понятие среднего вам хорошо знакомо, например, из кинематики, где средняя скорость за некоторый промежуток времени t вычисляется по формуле “весь путь делить на все время”:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t} \sum_i v(t_i) \Delta t_i = \frac{1}{t} \sum_i \Delta s_i = \frac{s}{t}.$$

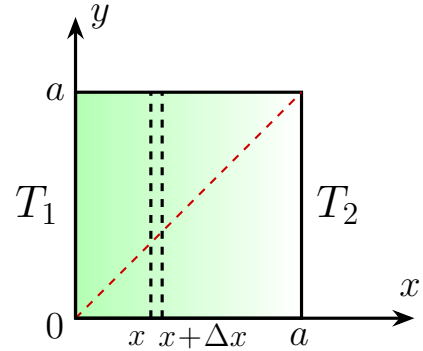


Рис. 10

Теперь произведем усреднение функции $T(x, y) = T(x)$, заданной уравнением (18). Из определения среднего легко понять, что оно линейно, то есть среднее суммы равно сумме средних и умножение функции на число при усреднении эквивалентно умножению среднего на это же число (при этом среднее значение константы равно самой константе). В итоге можно записать:

$$T_* = \langle T_1 + (T_2 - T_1) (x/a) \rangle = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\langle x \rangle}{a}. \quad (19)$$

Задача свелась к нахождению среднего значения координаты x в рассматриваемом треугольнике. Запишем по определению:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{S} \sum_i x_i \Delta S_i.$$

Заметим теперь, что выражение в правой части совпадает с определением координаты центра масс тела

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta M_i$$

с учетом простого соотношения $\Delta M_i = \rho \Delta S_i$, где ρ — масса куска пластины единичной площади. В итоге мы можем переписать (19) в виде

$$T_* = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x_c}{a}, \quad (20)$$

где осталось определить координату центра масс x_c нижнего треугольника. Как известно, центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Медиана, проведенная из вершины прямого угла нашего треугольника, совпадает с высотой и имеет длину $a/\sqrt{2}$. Тогда расстояние от вершины прямого угла до центра масс равно $(2/3)(a/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/3)a$. Проектируя радиус-вектор центра масс на ось x , получаем

$$x_c = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3} a.$$

В результате выражение (20) принимает вид

$$T_* = T_1 + \frac{2}{3} (T_2 - T_1) = \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_2.$$

Ответ: конечная температура нижней половины пластины равна $T_* = T_1/3 + 2T_2/3$.