

Городской тур 2024/25. 10 класс

Задача 1.

При изменении температуры поршень занимает такое положение, что сила давления газа компенсируется силой натяжения жгута (по условию снаружи от сосуда вакуум):

$$pS = F_{\text{упр}}, \quad (1)$$

где S — площадь поршня. Поскольку газ идеальный, для него можно записать уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \nu RT, \quad (2)$$

причём

$$V = S(L_0 + \Delta L) = SL_0(1 + \varepsilon). \quad (3)$$

Теперь (1) можно переписать в виде

$$\nu RT = F_{\text{упр}} L_0(1 + \varepsilon). \quad (4)$$

Введём следующие обозначения при температуре $T = T_{\Gamma}$: относительное удлинение ε_{Γ} , сила упругости $F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\Gamma})$. Теперь запишем уравнение (4) в точке, где жгут перестаёт подчиняться закону Гука:

$$\nu RT_{\Gamma} = F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\Gamma}) L_0(1 + \varepsilon_{\Gamma}). \quad (5)$$

Аналогично при критической температуре $T = T_{\text{кр}}$, когда жгут рвётся, введём относительное удлинение $\varepsilon_{\text{кр}}$ и силу упругости $F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\text{кр}})$. Тогда уравнение (4) для $T = T_{\text{кр}}$ запишется в виде

$$\nu RT_{\text{кр}} = F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\text{кр}}) L_0(1 + \varepsilon_{\text{кр}}) \iff T_{\text{кр}} = \frac{L_0}{\nu R} F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\text{кр}})(1 + \varepsilon_{\text{кр}}), \quad (6)$$

что с учётом (5) окончательно даёт

$$T_{\text{кр}} = \frac{1 + \varepsilon_{\text{кр}}}{1 + \varepsilon_{\Gamma}} \frac{F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\text{кр}})}{F_{\text{упр}}(\varepsilon_{\Gamma})} T_{\Gamma} = \frac{1 + 1.1 \cdot 2.6}{1 + 0.5 \cdot 2.0} T_{\Gamma} = 1.82 T_{\Gamma}. \quad (7)$$

Ответ: $T_{\text{кр}} = 1.82 T_{\Gamma}$.

Задача 2.

Рассмотрим участок проволоки между $x = x_0$ и $x = x_0 + d$. Из определения величины $U(x)$ следует, что падение напряжения на этом участке составляет $U(x_0 + d) - U(x_0)$. Поскольку сила тока, протекающего через проволоку, фиксирована и равна I , сопротивление этого участка в зависимости от начальной точки x_0 задаётся следующей функцией:

$$R(x_0) = \frac{U(x_0 + d) - U(x_0)}{I}. \quad (8)$$

Параметр d в соответствии с условием задачи выберем равным $0.3L$. Теперь наша цель — найти максимум функции (8) при изменении x_0 от нуля до $L - d = 0.7L$. Иными словами, требуется определить, на каком интервале фиксированной длины d функция $U(x)$ имеет наибольший прирост.

Далее можно рассуждать, например, следующим образом. График $U(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент на отрезке $(0.5L, 0.6L)$. Второе по величине значение углового коэффициента достигается при $x \in (0.6L, 0.7L)$, а третье — при $x \in (0.2L, 0.5L)$. Это означает, что искомый отрезок $(x_0, x_0 + d)$ должен содержаться в $(0.2L, 0.7L)$ и покрывать $(0.5L, 0.7L)$. Теперь мы понимаем, что таким отрезком является $(0.4L, 0.7L)$, т. е. $x_0 = 0.4L$. Остаётся вычислить сопротивление:

$$R_0 = R(0.4L) = \frac{U(0.7L) - U(0.4L)}{I} = \frac{2.0 \text{ В} - 0.6 \text{ В}}{10 \text{ мА}} = \frac{1.4}{0.01} \text{ Ом} = 140 \text{ Ом}.$$

Заметим также, что для решения задачи можно было бы рассмотреть сопротивление единицы длины проволоки $\lambda(x) = dR(x)/dx = U'(x)/I$. График этой функции легко построить — это кусочно-постоянная функция. Сопротивление $R(x_0)$ тогда будет площадью под графиком функции $\lambda(x)$ на отрезке $(x_0, x_0 + d)$. Анализируя график, легко прийти к полученному выше ответу.

Ответ: $x_0 = 0.4L$, $R_0 = 140 \text{ Ом}$.

Задача 3.

Рассмотрим отдельно условия равновесия поплавка и куба. Начнём с поплавка, на который действуют сила натяжения нити T , сила Архимеда F_A и сила тяжести. Поскольку поплавок лёгкий, последним вкладом можно пренебречь, так что условие равновесия сил записывается в виде

$$T = F_A . \quad (9)$$

По условию задачи поплавок, погружённый в воду, вытесняет объём hS , так что сила Архимеда равна $F_A = \rho ghS$, что позволяет записать

$$T = \rho ghS . \quad (10)$$

Отметим здесь, что сила F_A учитывает взаимодействие поплавка, как с жидкостью, так и с воздухом, и является результирующей всех сил давления (мы лишь пренебрегли давлением столба воздуха от верхнего края поплавка до поверхности воды, поскольку плотность воздуха много меньше ρ).

Теперь рассмотрим куб. Нить лёгкая, силы трения со стороны блока нет. Это означает, что со стороны нити на куб действует сила, направленная вправо и имеющая модуль T . В противоположном направлении на куб действует сила трения $F_{\text{тр}}$. Вдоль вертикальной оси действуют сила нормальной реакции стенки N , сила тяжести Mg и сила давления со стороны воды F . Сразу отметим, что F не равна ρga^3 , так как вода не давит на куб сверху. Величина равнодействующей всех сил давления со стороны воды F равна силе давления, действующей на нижнюю грань: $F = pa^2$, где p — давление на уровне нижней грани. С учетом атмосферного давления и гидростатического давления столба воды высотой $h + a$ получаем

$$F = [p_a + \rho g(h + a)]a^2 . \quad (11)$$

Запишем условия равновесия сил для куба:

$$F_{\text{тр}} = T , \quad (12)$$

$$N + Mg = F , \quad (13)$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N . \quad (14)$$

Из уравнений (10) и (12) получаем

$$F_{\text{тр}} = \rho ghS . \quad (15)$$

По условию плотность куба $\rho/2$, откуда $M = \rho a^3/2$. Тогда из уравнения (13) находим, что

$$N = [p_a + \rho g(h + a)]a^2 - \frac{1}{2} \rho ga^3 = [p_a + \rho g(h + a/2)]a^2 . \quad (16)$$

Заметим, что $N > 0$, что обеспечивает “прижатие” куба к верхней стенке сосуда. Подставляя найденные силы в неравенство (14), получаем условие $\mu \geq \mu_0$, где

$$\mu_0 = \frac{\rho gh S}{p_a a^2} \frac{1}{1 + \rho g(h + a/2)/p_a} . \quad (17)$$

В это выражение входят только величины, известные по условию задачи.

Рассмотрим теперь условие равновесия моментов сил, действующих на куб. Для удобства выберем ось, проходящую через центр верхней грани куба. Обозначим за x расстояние от этой оси до точки приложения силы реакции N . Тогда

$$Nx = T \frac{a}{2} . \quad (18)$$

При увеличении силы T точка приложения силы реакции смещается, чтобы увеличить плечо x и скомпенсировать моменты. Это может происходить вплоть до значения $x = a/2$. Таким образом, куб не будет вращаться, если выполняется условие

$$T \leq N , \quad (19)$$

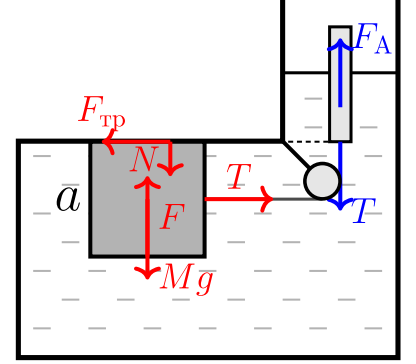


Рис. 1:

С учетом результатов (10) и (16) получаем условие

$$\mu_0 \leq 1. \quad (20)$$

В это неравенство не входит коэффициент трения μ , а в нём присутствуют лишь параметры, заданные в условии задачи. Для равновесия куба требуется *одновременное* выполнение неравенств $\mu \geq \mu_0$ и $\mu_0 \leq 1$. Теперь можем сформулировать ответ.

Ответ: если величина $\mu_0 = \rho ghS/[(p_a + \rho g(h + a/2))a^2]$ не превосходит 1, то коэффициент трения должен удовлетворять условию $\mu \geq \mu_0$; если $\mu_0 > 1$, то равновесие невозможно ни при каком μ .

Задача 4.

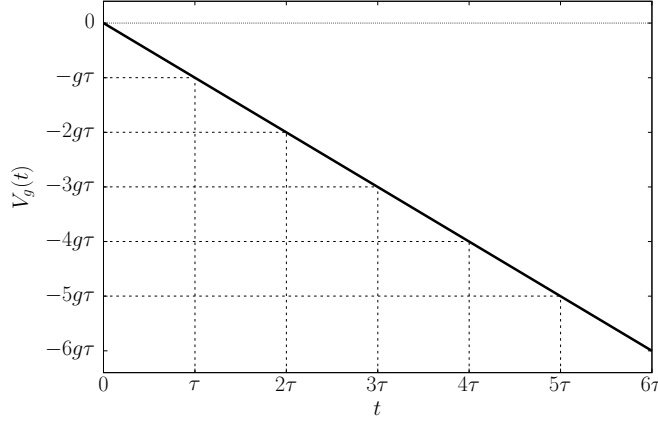


Рис. 2:

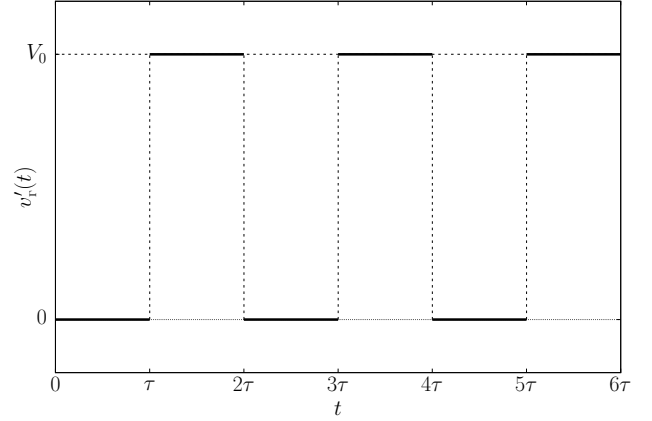


Рис. 3:

Поместим начало координат в точку, в которой располагалась середина гантели до того, как её отпустили. Ось направим вверх. Скорости бусинки и гантели относительно этой неподвижной системы отсчёта можно представить в виде:

$$v_6(t) = V_g(t) + v'_6(t), \quad (21)$$

$$v_r(t) = V_g(t) + v'_r(t). \quad (22)$$

Скорость $V_g(t) = -gt$ связана с действием силы тяжести и описывает свободное падение системы как целого. График соответствующей функции представлен на Рис. 2. Величина $v_6(t) - v_r(t) = v'_6(t) - v'_r(t)$ является относительной скоростью бусинки и гантели. Сами скорости $v'_6(t)$ и $v'_r(t)$ соответствуют скоростям бусинки и гантели в “сопутствующей” неинерциальной системе отсчёта, которая свободно падает вместе с ними. В этой системе отсчёта взаимное движение бусинки и гантели происходит так, как будто на них не действует никаких внешних сил. По условию, в начальный момент относительная скорость бусинки и гантели равна V_0 , ясно также, что $v'_6(0) = V_0$ и $v'_r(0) = 0$. Относительная скорость, как, впрочем, и скорости $v'_6(t)$ и $v'_r(t)$, могут меняться только в моменты соударения бусинки и гантели. Однако, поскольку полная масса гантели $m + m$ совпадает с массой бусинки $2m$, а соударения происходят абсолютно упруго, заключаем, что при ударах относительная скорость меняется на противоположную, скорости $v'_6(t)$ и $v'_r(t)$ “обмениваются” значениями. График зависимости скорости $v'_r(t)$ представлен на Рис. 3. Здесь $\tau = L/V_0$ — интервал времени между двумя последовательными соударениями. Чтобы найти график зависимости $v_r(t)$ нужно “сложить” графики, показанные на Рис. 2 и 3.

Перемещение тела можно найти, рассчитав площадь под графиком его скорости. Поскольку итоговая скорость $v_r(t)$ есть сумма скоростей $V_g(t)$ и $v'_r(t)$, итоговое перемещение есть сумма площадей под соответствующими графиками. Для Рис. 2 площадь к моменту времени t найти легко, она равна $\Delta X_g(t) = -gt^2/2$. Разберёмся с графиком на Рис. 2. Видно, что график имеет период величиной 2τ . Введём число $k = 0, 1, 2, \dots$, которое нумерует эти периоды (значение $k = 0$ отвечает интервалу времени $[0, 2\tau]$). Учитывая, что площадь каждого “прямоугольного зубчика” на Рис. 3 равна $V_0\tau = L$, можно получить следующие выражения:

$$\Delta x'_r(t) = kL, \quad \text{если} \quad t \in [2k\tau, (2k+1)\tau], \quad (23)$$

$$\Delta x'_r(t) = kL + V_0(t - (2k+1)\tau), \quad \text{если} \quad t \in [(2k+1)\tau, (2k+2)\tau]. \quad (24)$$

Найдём ответ на первый вопрос задачи. Определим, какую начальную скорость должна иметь бусинка, чтобы в момент удара о верхний диск, положение гантели совпадало с изначальным. Удары о верхний диск происходят в моменты времени $t = (2k + 1)\tau$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\Delta X_g((2k + 1)\tau) + \Delta x'_r((2k + 1)\tau) = 0 \Leftrightarrow -\frac{g((2k + 1)\tau)^2}{2} + kL = 0 \Leftrightarrow V_0 = (2k + 1)\sqrt{\frac{gL}{2k}} = n\sqrt{\frac{gL}{n-1}}, \quad (25)$$

где в последнем равенстве число k было выражено через номер удара $n = 2k + 1$. Случай $k = 0$ ($n = 1$) соответствует первому соударению. Для того, чтобы гантель не успела опуститься, начальная скорость бусинки должна быть бесконечной, как и следует из (25).

Определим, какую начальную скорость должна иметь бусинка, чтобы в момент удара о нижний диск, положение гантели совпадало с изначальным. Удары о нижний диск происходят в моменты времени $t = (2k + 2)\tau$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta X_g((2k + 2)\tau) + \Delta x'_r((2k + 2)\tau) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{g((2k + 2)\tau)^2}{2} + (k + 1)L = 0 \\ &\Leftrightarrow V_0 = (2k + 2)\sqrt{\frac{gL}{2(k + 1)}} = \sqrt{ngL}. \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим второй вопрос задачи. Найдём все моменты времени, при которых для заданных значений параметров ($L = 1$ м, $V_0 = 8$ м/с, $g = 10$ м/с²) гантель оказывается на исходной высоте. Заметим, что на достаточно больших временах, когда центр масс всей системы опускается ниже своего изначального положения, удовлетворить этому условию оказывается невозможным. Предположим, что искомый момент времени относится к интервалу времени, указанному в (23). Тогда,

$$-\frac{gt^2}{2} + kL = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2kL}{g}}. \quad (27)$$

Перебирая разные значения k , можно получить, что в интервал $[2k\tau, (2k + 1)\tau]$ попадает только значение $t_1 = \sqrt{6L/g} \approx 0.7746$ с, соответствующее $k = 3$ в (27). Предположим теперь, что искомый момент времени относится к интервалу времени, указанному в (24). Тогда,

$$-\frac{gt^2}{2} + V_0t - (k + 1)L = 0 \Leftrightarrow t = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2(k + 1)gL}}{g}. \quad (28)$$

Перебирая разные значения k , можно получить, что в интервал $[2k\tau, (2k + 1)\tau]$ попадает только значение $t_2 = (V_0 - \sqrt{V_0^2 - gL})/g \approx 0.1367$ с, соответствующее $k = 0$ и знаку “−” в (28).

Ответ: 1) чтобы в момент n -го удара гантель находилась на исходной высоте, начальная скорость должна быть равна $n\sqrt{gL/(n-1)}$ или $\sqrt{ngL}$ в зависимости от того, речь идёт о нечётном (о верхний диск) или чётном (о нижний диск) ударе; 2) $t_1 \approx 0.7746$ с и $t_2 \approx 0.1367$ с.

Задача 5.

См. решение задачи № 4 в варианте 11 класса.