

Районный тур 2024/25 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

Решение 1: Неинерциальная система отсчёта

В неинерциальной системе отсчета, связанной со станцией, на расстоянии r от оси вращения действует центробежное ускорение $g(r) = \omega^2 r$.

Центробежная сила на работника с грузом массой M на расстоянии r равна $F_{цб} = M\omega^2 r$. При перемещении работника от R до $R/2$ центробежное ускорение $g(r)$ линейно уменьшается от $\omega^2 R$ до $\omega^2 R/2$.

Работа, которую необходимо совершить, равна площади под графиком $g(r)$ от R до $R/2$, умноженной на M (см. рис. 1): $A = M \cdot \text{Площадь}$.

Площадь под графиком на участке $r \in [R/2, R]$ равна площади трапеции:

$$\text{Площадь} = \frac{g(R) + g\left(\frac{R}{2}\right)}{2} \cdot \left(R - \frac{R}{2}\right).$$

Подставим значения:

$$\text{Площадь} = \frac{\omega^2 R + \frac{\omega^2 R}{2}}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{3\omega^2 R^2}{8}.$$

Следовательно, работа равна: $A = 3M\omega^2 R^2/8$.

Эта работа будет затрачена **на преодоление центробежной силы при перемещении к оси станции.**

Решение 2: Инерциальная система отсчёта

В инерциальной системе отсчета, где космическая станция вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω , работа, совершаемая работником при приближении к оси, расходуется на изменение его кинетической энергии. Будем считать угловую скорость станции ω постоянной. Линейная скорость работника на расстоянии r от оси вращения равна: $v = \omega r$. На расстоянии R от оси вращения начальная линейная скорость $v_{\text{нач}} = \omega R$. Когда работник приближается к оси на расстояние $R/2$, его конечная линейная скорость $v_{\text{кон}} = \omega R/2$.

Масса работника вместе с грузом равна M . Тогда его начальная кинетическая энергия $E_{\text{кин нач}}$ на расстоянии R от оси вращения равна:

$$E_{\text{кин нач}} = \frac{Mv_{\text{нач}}^2}{2} = \frac{M(\omega R)^2}{2} = \frac{M\omega^2 R^2}{2}.$$

Конечная кинетическая энергия работника с грузом равна:

$$E_{\text{кин кон}} = \frac{Mv_{\text{кон}}^2}{2} = \frac{M\left(\frac{\omega R}{2}\right)^2}{2} = \frac{M\omega^2 R^2}{8}.$$

Работа, которую совершает работник, равна их разности:

$$A = E_{\text{кин нач}} - E_{\text{кин кон}} = \frac{M\omega^2 R^2}{2} - \frac{M\omega^2 R^2}{8} = \frac{3M\omega^2 R^2}{8}.$$

Таким образом, в инерциальной системе отсчета **работа тратится на уменьшение кинетической энергии работника с грузом** при приближении к оси вращения. Так как станция ни с чем не взаимодействует, и полная энергия ее сохраняется, уменьшение кинетической энергии работника приведёт к увеличению кинетической энергии вращения станции. Поэтому можно сказать, что **работа потрачена на раскручивание станции вокруг своей оси.**

При решении мы использовали, что ω неизменно. Это справедливо, если станция гораздо тяжелее работника, что является вполне разумным приближением.

Ответ: Минимальная работа $A = 3M\omega^2 R^2/8$.

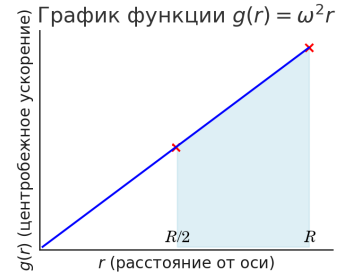


Рис. 1:

Задача 2. I вариант.

Определим ускорения лампочки и зеркала относительно земли. Обозначим: T – сила натяжения нити, a – модуль ускорения лампочки и зеркала относительно земли.

Направим ось координат вниз, рассмотрим силы, действующие на зеркало и лампочку. Запишем второй закон Ньютона.

Для зеркала: $m_3 g - T = m_3 a$,

для лампочки: $m_л g - T = -m_л a$.

Вычтем из первого уравнения второе, чтобы исключить T :

$$m_3 g - m_л g = (m_3 + m_л) a \quad \Rightarrow \quad a = g \frac{m_3 - m_л}{m_3 + m_л}.$$

Это ускорение, с которым зеркало движется вниз, а лампочка — вверх относительно земли.

Ускорение изображения в зеркале

Известно, что изображение предмета в плоском зеркале симметрично относительно его поверхности. Если предмет находится на расстоянии r от зеркала, изображение отстоит на таком же расстоянии, но в противоположной стороне от поверхности ("за зеркалом"). Следовательно, расстояние между предметом и изображением равно $2r$.

Теперь учтём движение системы. Начальная координата зеркала $z_3(0) = 0$, начальная координата лампочки $z_л(0) = 0$. Начальная координата изображения $z_{из}(0) = 0$.

Лампочка движется вверх с ускорением a , её координата $z_л(t) = -at^2/2$.

Зеркало движется вниз с ускорением a , его координата: $z_3(t) = at^2/2$.

Положение изображения лампочки: Изображение лампочки относительно зеркала находится на том же расстоянии, что и лампочка, но с другой стороны. Координата изображения:

$$z_{из}(t) = 2z_3(t) - z_л(t).$$

Подставим сюда координату лампочки и зеркала:

$$z_{из}(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} at^2 - \left(-\frac{1}{2} at^2 \right) = \frac{3}{2} at^2.$$

Таким образом, изображение движется вниз с ускорением $3a$.

Расстояние между лампочкой и её изображением: $r(t) = |z_{из}(t) - z_л(t)|$.

Подставим сюда найденные координаты:

$$r(t) = \left| \frac{3}{2} at^2 - \left(-\frac{1}{2} at^2 \right) \right| = 2at^2.$$

Ответ: Ускорение изображения лампочки в зеркале относительно наблюдателя, расположенного на земле:

$$3a = 3g \frac{m_3 - m_л}{m_3 + m_л}.$$

Закон изменения расстояния между лампочкой и её изображением

$$r(t) = 2g \frac{m_3 - m_л}{m_3 + m_л} t^2.$$

Задача 3. I вариант.

Бусинки начинают движение из одной точки с начальной скоростью V_0 . Поле $\mathbf{E}$ вначале ускоряет положительно заряженную бусинку, а отрицательно заряженную бусинку ($-q$) тормозит. Поэтому положительная бусинка быстро наберет скорость, проскочит точку O и преодолеет большую часть "восьмерки" за то время, пока отрицательная бусинка впервые доберется до точки O . Итак, при столкновении бусинки будут двигаться навстречу друг другу.

Скорости бусинок в момент столкновения в точке O

Для каждой бусинки запишем закон сохранения энергии.

Положительно заряженная бусинка: Кинетическая энергия при старте: $\frac{mV_0^2}{2}$. в дальнейшем увеличивается за счет работы электрического поля. Энергия бусинки в момент столкновения: $\frac{mV_+^2}{2}$, где V_+ — скорость положительно заряженной бусинки в точке O . Так как $A = qEa$ — работа электрического поля над этой бусинкой, по закону сохранения энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} + qEa = \frac{mV_+^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_+ = \sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}}.$$

Энергия кулоновского взаимодействия бусинок сюда не входит, так как в момент старта и в момент столкновения она одинаковая.

Отрицательно заряженная бусинка: Электрическое поле тормозит её. Работа поля: $A = -qEa$, так как направление силы поля противоположно движению. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mV_0^2}{2} - qEa = \frac{mV_-^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_- = \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}.$$

Скорость слипшихся бусинок после абсолютно неупругого удара

После абсолютно неупругого соударения слипшиеся бусинки движутся как одно тело. Используем закон сохранения импульса. Пусть скорость слипшихся бусинок после удара равна u . Тогда:

$$mV_+ + m(-V_-) = 2mu.$$

Отсюда:

$$u = \frac{V_+ - V_-}{2} = \frac{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}{2}.$$

Движение слипшихся бусинок

После слипания бусинки образуют нейтральную систему, заряды $+q$ и $-q$ компенсируют друг друга. Следовательно, на них больше не действует сила электрического поля. Они продолжают двигаться по проволоке с постоянной скоростью u .

Общая длина "восьмерки" равна L . Слипшиеся бусинки совершают полный цикл (возвращаются в точку O) за время T , равное времени прохождения всего пути L со скоростью u :

$$T = \frac{L}{u} = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}.$$

Ответ: Период возврата слипшихся бусинок в точку O равен:

$$T = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}.$$

Задача 4. I вариант. На стрелку действуют два поля: магнитное и электрическое. Мы будем использовать энергетические соображения для нахождения угла равновесия.

Энергия взаимодействия с магнитным полем:

Магнитное поле B стремится привести стрелку в положение, где её магнитный момент μ ориентирован вдоль поля. Энергия взаимодействия магнитного момента с полем:

$$\epsilon_{\text{маг}} = -\mu B \cos \varphi.$$

Здесь φ — угол между направлением магнитного поля B и направлением стрелки.

Энергия взаимодействия с электрическим полем:

Электрическое поле E действует на заряженный конец стрелки, создавая силу $F_e = qE$. Эта сила пытается отклонить стрелку. Момент силы F_e относительно оси вращения стрелки стремится повернуть её в сторону электрического поля.

Энергия взаимодействия электрического поля с зарядом на стрелке:

$$\epsilon_{\text{эл}} = -qEl \sin \varphi,$$

где $l \sin \varphi$ — смещение заряда вдоль направления поля E .

Общая энергия системы:

Сумма энергий взаимодействия с магнитным и электрическим полем:

$$\epsilon_{\text{общ}} = \epsilon_{\text{маг}} + \epsilon_{\text{эл}} = -\mu B \cos \varphi - qEl \sin \varphi.$$

Условие равновесия:

Для нахождения угла равновесия необходимо минимизировать общую энергию, для чего найдём производную $\frac{d\epsilon_{\text{общ}}}{d\varphi}$ и приравняем её к нулю:

$$\frac{d\epsilon_{\text{общ}}}{d\varphi} = \mu B \sin \varphi - qEl \cos \varphi = 0.$$

Из этого уравнения получаем:

$$\mu B \sin \varphi = qEl \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{qEl}{\mu B}.$$

Ответ: Угол φ , под которым стрелка установится в равновесии, равен:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{qEl}{\mu B} \right).$$

Задача 5. I вариант.

Рассмотрим процесс передачи системе небольшого количества теплоты ΔQ . Будем считать, что эта теплота настолько невелика, что изменения всех термодинамических величин малы по отношению к самим этим величинам.

Уравнение первого закона термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A,$$

где: ΔQ — количество тепла, получаемого системой; ΔU — изменение внутренней энергии системы; ΔA — работа, совершаемая системой. Наша задача — найти теплоёмкость:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T}.$$

Найдём $\Delta U / \Delta T$. Для двухатомного газа внутренняя энергия:

$$U = \frac{5}{2} \nu RT \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2} \nu R.$$

Чтобы учесть работу газа, нужно изучить давление газа P внутри резиновой оболочки.

Работа газа $\Delta A = P\Delta V$. Эта формула верна, если изменение давления газа мало по сравнению с начальным P . В рассматриваемом процессе это верно. Из условия известно, что эта работа совпадает с работой растяжения резиновой оболочки, то есть $\Delta A = \sigma\Delta S$. Итак, $\sigma\Delta S = P\Delta V$, поэтому

$$P = \sigma \frac{\Delta S}{\Delta V}.$$

Фактически, в давление дала вклад производная площади S по объёму V . Для сферической оболочки радиуса r :

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

отсюда можно найти производную S по V . Это можно сделать разными способами, самый простой – использовать понятие дифференциала:

$$\frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{dS}{dV} = \frac{d(4\pi r^2)}{d(\frac{4}{3}\pi r^3)} = \frac{4\pi dr^2}{\frac{4}{3}\pi dr^3} = 3 \frac{dr^2}{dr^3} = 3 \frac{2rdr}{3r^2dr} = \frac{2}{r}.$$

В итоге давление в шарике радиуса r

$$P = \frac{2\sigma}{r}.$$

Этот ответ можно было и сразу записать, если вы заметили аналогию с поверхностным натяжением и знаете соответствующую формулу.

Учет $\Delta A/\Delta T$

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{\sigma\Delta S}{\Delta T}.$$

Требуется найти производную площади по температуре, для этого нужна зависимость $S(T)$. Найдём сначала $T(V)$ из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$PV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{\nu R} = \frac{\frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\nu R} = \frac{2\sigma 4\pi r^2}{3\nu R}.$$

Отсюда видно, что $T \propto r^2$. Следовательно, $S = 4\pi r^2$ и T пропорциональны:

$$T = \frac{2\sigma S}{3\nu R}, \quad S = \frac{3\nu R}{2\sigma} T.$$

Отсюда производная площади поверхности шарика по температуре равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{3\nu R}{2\sigma}.$$

Это позволяет посчитать вклад работы в теплоёмкость:

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \sigma \frac{\Delta S}{\Delta T} = \sigma \cdot \frac{3\nu R}{2\sigma} = \frac{3\nu R}{2}.$$

Подставляем полученные слагаемые в теплоёмкость, получаем ответ:

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{5}{2}\nu R + \frac{3}{2}\nu R = 4\nu R.$$

Ответ:

$$C = 4\nu R.$$

Районный тур 2024/25 учебный год. 11 класс. Решения.

Задача 1. II вариант.

Решение 1: Неинерциальная система отсчёта

В неинерциальной системе отсчета, связанной со станцией, на расстоянии r от оси вращения действует центробежное ускорение $g(r) = \omega^2 r$.

Центробежная сила на работника с грузом массой M на расстоянии r равна $F_{цб} = M\omega^2 r$. При перемещении работника от R до $R/3$ центробежное ускорение $g(r)$ линейно уменьшается от $\omega^2 R$ до $\omega^2 R/3$.

Работа, которую необходимо совершить, равна площади под графиком $g(r)$ от R до $R/3$, умноженной на M (см. рис. 2): $A = M \cdot \text{Площадь}$.

Площадь под графиком на участке $r \in [R/3, R]$ равна площади трапеции:

$$\text{Площадь} = \frac{g(R) + g\left(\frac{R}{3}\right)}{2} \cdot \left(R - \frac{R}{3}\right).$$

Подставим значения:

$$\text{Площадь} = \frac{\omega^2 R + \frac{\omega^2 R}{3}}{2} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{4\omega^2 R^2}{9}.$$

Следовательно, работа равна: $A = 4M\omega^2 R^2/9$.

Эта работа будет затрачена **на преодоление центробежной силы при перемещении к оси станции.**

Решение 2: Инерциальная система отсчёта

В инерциальной системе отсчета, где космическая станция вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω , работа, совершаемая работником при приближении к оси, расходуется на изменение его кинетической энергии. Будем считать угловую скорость станции ω постоянной. Линейная скорость работника на расстоянии r от оси вращения равна: $v = \omega r$. На расстоянии R от оси вращения начальная линейная скорость $v_{\text{нач}} = \omega R$. Когда работник приближается к оси на расстояние $R/3$, его конечная линейная скорость $v_{\text{кон}} = \omega R/3$.

Масса работника вместе с грузом равна M . Тогда его начальная кинетическая энергия $E_{\text{кин нач}}$ на расстоянии R от оси вращения равна:

$$E_{\text{кин нач}} = \frac{Mv_{\text{нач}}^2}{2} = \frac{M(\omega R)^2}{2} = \frac{M\omega^2 R^2}{2}.$$

Конечная кинетическая энергия работника с грузом равна:

$$E_{\text{кин кон}} = \frac{Mv_{\text{кон}}^2}{2} = \frac{M\left(\frac{\omega R}{3}\right)^2}{2} = \frac{M\omega^2 R^2}{18}.$$

Работа, которую совершает работник, равна их разности:

$$A = E_{\text{кин нач}} - E_{\text{кин кон}} = \frac{M\omega^2 R^2}{2} - \frac{M\omega^2 R^2}{18} = \frac{8M\omega^2 R^2}{18} = \frac{4M\omega^2 R^2}{9}.$$

Таким образом, в инерциальной системе отсчета **работа тратится на уменьшение кинетической энергии работника с грузом** при приближении к оси вращения. Так как станция ни с чем не взаимодействует, и полная энергия ее сохраняется, уменьшение кинетической энергии работника приведёт к увеличению кинетической энергии вращения станции. Поэтому можно сказать, что **работа потрачена на раскручивание станции вокруг своей оси.**

При решении мы использовали, что ω неизменно. Это справедливо, если станция гораздо тяжелее работника, что является вполне разумным приближением.

Ответ: Минимальная работа $A = 4M\omega^2 R^2/9$.

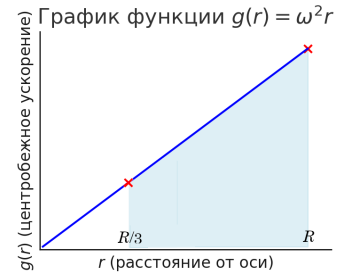


Рис. 2:

Задача 2. II вариант.

Определим ускорения лампочки и зеркала относительно земли. Обозначим: T – сила натяжения нити, a – модуль ускорения лампочки и зеркала относительно земли.

Направим ось координат вверх, рассмотрим силы, действующие на зеркало и лампочку. Запишем второй закон Ньютона.

Для зеркала: $T - m_3 g = m_3 a$,

для лампочки: $T - m_{\text{л}} g = -m_{\text{л}} a$.

Вычтем из первого уравнения второе, чтобы исключить T :

$$m_{\text{л}} g - m_3 g = (m_3 + m_{\text{л}}) a \quad \Rightarrow \quad a = g \frac{m_{\text{л}} - m_3}{m_3 + m_{\text{л}}}.$$

Это ускорение, с которым лампочка движется вниз, а зеркало — вверх относительно земли.

Ускорение изображения в зеркале

Известно, что изображение предмета в плоском зеркале симметрично относительно его поверхности. Если предмет находится на расстоянии r от зеркала, изображение отстоит на таком же расстоянии, но в противоположной стороне от зеркала. Следовательно, расстояние между предметом и изображением равно $2r$.

Теперь учтём движение системы. Начальная координата зеркала $z_3(0) = 0$, начальная координата лампочки $z_{\text{л}}(0) = 0$. Начальная координата изображения $z_{\text{из}}(0) = 0$.

Лампочка движется вниз с ускорением a , её координата $z_{\text{л}}(t) = -at^2/2$.

Зеркало движется вверх с ускорением a , его координата: $z_3(t) = at^2/2$.

Положение изображения лампочки: Изображение лампочки относительно зеркала находится на том же расстоянии, что и лампочка, но с другой стороны. Координата изображения:

$$z_{\text{из}}(t) = 2z_3(t) - z_{\text{л}}(t).$$

Подставим сюда координату лампочки и зеркала:

$$z_{\text{из}}(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} at^2 - \left(-\frac{1}{2} at^2 \right) = \frac{3}{2} at^2.$$

Таким образом, изображение движется вверх с ускорением $3a$.

Расстояние между лампочкой и её изображением: $r(t) = |z_{\text{из}}(t) - z_{\text{л}}(t)|$.

Подставим сюда найденные координаты:

$$r(t) = \left| \frac{3}{2} at^2 - \left(-\frac{1}{2} at^2 \right) \right| = 2at^2.$$

Ответ: Ускорение изображения лампочки в зеркале относительно наблюдателя, расположенного на земле:

$$3a = 3g \frac{m_{\text{л}} - m_3}{m_3 + m_{\text{л}}}.$$

Закон изменения расстояния между лампочкой и её изображением

$$r(t) = 2g \frac{m_{\text{л}} - m_3}{m_3 + m_{\text{л}}} t^2.$$

Задача 3. II вариант.

Бусинки начинают движение из одной точки с начальной скоростью V_0 . Поле $\mathbf{E}$ вначале тормозит положительно заряженную бусинку, а отрицательно заряженную бусинку ($-q$) ускоряет. Поэтому отрицательная бусинка быстро наберет скорость, проскочит точку O и преодолеет большую часть "восьмерки" за то время, пока положительная бусинка впервые доберется до точки O . Итак, при столкновении бусинки будут двигаться навстречу друг другу.

Скорости бусинок в момент столкновения в точке O

Для каждой бусинки запишем закон сохранения энергии.

Положительно заряженная бусинка: Кинетическая энергия при старте: $\frac{mV_0^2}{2}$. в дальнейшем уменьшается за счет работы электрического поля. Энергия бусинки в момент столкновения: $\frac{mV_+^2}{2}$, где V_+ — скорость положительно заряженной бусинки в точке O . Так как $A = -qEa$ — работа электрического поля над этой бусинкой, по закону сохранения энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} - qEa = \frac{mV_+^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_+ = \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}.$$

Энергия кулоновского взаимодействия бусинок сюда не входит, так как в момент старта и в момент столкновения она одинаковая.

Отрицательно заряженная бусинка: Электрическое поле разгоняет её. Работа поля: $A = qEa$, так как направление силы поля совпадает с направлением движения. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mV_0^2}{2} + qEa = \frac{mV_-^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_- = \sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}}.$$

Скорость слипшихся бусинок после абсолютно неупругого удара

После абсолютно неупругого соударения слипшиеся бусинки движутся как одно тело. Используем закон сохранения импульса. Пусть скорость слипшихся бусинок после удара равна u . Тогда:

$$mV_- + m(-V_+) = 2mu.$$

Отсюда:

$$u = \frac{V_- - V_+}{2} = \frac{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}{2}.$$

Движение слипшихся бусинок

После слипания бусинки образуют нейтральную систему, заряды $+q$ и $-q$ компенсируют друг друга. Следовательно, на них больше не действует сила электрического поля. Они продолжают двигаться по проволоке с постоянной скоростью u .

Общая длина "восьмерки" равна L . Слипшиеся бусинки совершают полный цикл (возвращаются в точку A) за время T , равное времени прохождения всего пути L со скоростью u :

$$T = \frac{L}{u} = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}.$$

Ответ: Период возврата слипшихся бусинок в точку A равен:

$$T = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2qEa}{m}} - \sqrt{V_0^2 - \frac{2qEa}{m}}}.$$

Задача 4. II вариант. На стрелку действуют два поля: магнитное и электрическое. Мы будем использовать энергетические соображения для нахождения угла равновесия.

Энергия взаимодействия с магнитным полем:

Магнитное поле B стремится привести стрелку в положение, где её магнитный момент μ ориентирован вдоль поля. Энергия взаимодействия магнитного момента с полем:

$$\epsilon_{\text{маг}} = -\mu B \cos \varphi.$$

Здесь φ — угол между направлением магнитного поля B и направлением стрелки.

Энергия взаимодействия с электрическим полем:

Электрическое поле E действует на заряженный конец стрелки, создавая силу $F_e = qE$. Эта сила пытается отклонить стрелку. Момент силы F_e относительно оси вращения стрелки стремится повернуть её в сторону электрического поля.

Энергия взаимодействия электрического поля с зарядом на стрелке:

$$\epsilon_{\text{эл}} = -qEl \sin \varphi,$$

где $l \sin \varphi$ — смещение заряда вдоль направления поля E .

Общая энергия системы:

Сумма энергий взаимодействия с магнитным и электрическим полем:

$$\epsilon_{\text{общ}} = \epsilon_{\text{маг}} + \epsilon_{\text{эл}} = -\mu B \cos \varphi - qEl \sin \varphi.$$

Условие равновесия:

Для нахождения угла равновесия необходимо минимизировать общую энергию, для чего найдём производную $\frac{d\epsilon_{\text{общ}}}{d\varphi}$ и приравняем её к нулю:

$$\frac{d\epsilon_{\text{общ}}}{d\varphi} = \mu B \sin \varphi - qEl \cos \varphi = 0.$$

Из этого уравнения получаем:

$$\mu B \sin \varphi = qEl \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{qEl}{\mu B}.$$

Ответ: Угол φ , под которым стрелка установится в равновесии, равен:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{qEl}{\mu B} \right).$$

Задача 5. II вариант.

Рассмотрим процесс передачи системе небольшого количества теплоты ΔQ . Будем считать, что эта теплота настолько невелика, что изменения всех термодинамических величин малы по отношению к самим этим величинам.

Уравнение первого закона термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A,$$

где: ΔQ — количество тепла, получаемого системой; ΔU — изменение внутренней энергии системы; ΔA — работа, совершаемая системой. Наша задача — найти теплоёмкость:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T}.$$

Найдём $\Delta U / \Delta T$. Для одноатомного газа внутренняя энергия:

$$U = \frac{3}{2} \nu RT \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} \nu R.$$

Чтобы учесть работу газа, нужно изучить давление газа P внутри резиновой оболочки.

Работа газа $\Delta A = P\Delta V$. Эта формула верна, если изменение давления газа мало по сравнению с начальным P . В рассматриваемом процессе это верно. Из условия известно, что эта работа совпадает с работой растяжения резиновой оболочки, то есть $\Delta A = \sigma\Delta S$. Итак, $\sigma\Delta S = P\Delta V$, поэтому

$$P = \sigma \frac{\Delta S}{\Delta V}.$$

Фактически, в давление дала вклад производная площади S по объёму V . Для сферической оболочки радиуса r :

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

отсюда можно найти производную S по V . Это можно сделать разными способами, самый простой – использовать понятие дифференциала:

$$\frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{dS}{dV} = \frac{d(4\pi r^2)}{d(\frac{4}{3}\pi r^3)} = \frac{4\pi dr^2}{\frac{4}{3}\pi dr^3} = 3 \frac{dr^2}{dr^3} = 3 \frac{2rdr}{3r^2dr} = \frac{2}{r}.$$

В итоге давление в шарике радиуса r

$$P = \frac{2\sigma}{r}.$$

Этот ответ можно было и сразу записать, если вы заметили аналогию с поверхностным натяжением и знаете соответствующую формулу.

Учет $\Delta A/\Delta T$

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{\sigma\Delta S}{\Delta T}.$$

Требуется найти производную площади по температуре, для этого нужна зависимость $S(T)$. Найдём сначала $T(V)$ из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$PV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{\nu R} = \frac{\frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\nu R} = \frac{2\sigma 4\pi r^2}{3\nu R}.$$

Отсюда видно, что $T \propto r^2$. Следовательно, $S = 4\pi r^2$ и T пропорциональны:

$$T = \frac{2\sigma S}{3\nu R}, \quad S = \frac{3\nu R}{2\sigma} T.$$

Отсюда производная площади поверхности шарика по температуре равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{3\nu R}{2\sigma}.$$

Это позволяет посчитать вклад работы в теплоёмкость:

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \sigma \frac{\Delta S}{\Delta T} = \sigma \cdot \frac{3\nu R}{2\sigma} = \frac{3\nu R}{2}.$$

Подставляем полученные слагаемые в теплоёмкость, получаем ответ:

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2}\nu R + \frac{3}{2}\nu R = 3\nu R.$$

Ответ:

$$C = 3\nu R.$$