

Задача 11.1. Магнит и стрелка

Проведите эксперимент и выведите эмпирическую зависимость периода колебаний магнитной стрелки от расстояния до постоянного магнита для случаев, когда направление на стрелку направлено от магнита 1) вдоль его магнитного момента, 2) перпендикулярно его магнитному моменту.

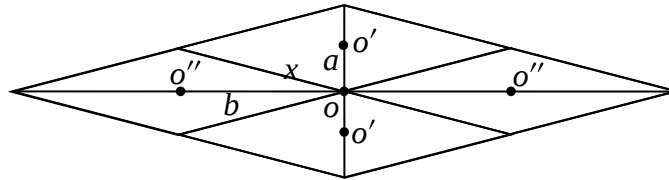
Выведите теоретически эти зависимости и сопоставьте их с экспериментом. Определите, чему равно произведение магнитных моментов постоянного магнита p_{m0} и магнитной стрелки p_m . Оценивать погрешности в задаче не требуется.

В процессе вывода докажите и используйте, что момент инерции стрелки $I_o = \frac{m(a^2 + b^2)}{24}$, где a и b – диагонали ромба.

Оборудование: постоянный магнит, магнитная стрелка (воздушный компас), секундомер, линейка.

Решение

Момент инерции стрелки компаса.



$$I_o = kml^2 = 4k \frac{m}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2 \frac{m}{4} \left(\frac{a}{4} \right)^2 + 2 \frac{m}{4} \left(\frac{b}{4} \right)^2$$

$$I_o = kml^2 = \frac{m(a^2 + b^2)}{24} \quad (1)$$

Нахождение периода колебаний.

$$M = I_o \beta$$

$$-p_m B \sin \alpha = I_o \alpha'', \quad \alpha'' + \frac{p_m B}{I_o} \alpha = 0,$$

где p_m – магнитный момент стрелки.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{p_m B}{I_o}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{p_m B}}. \quad (2)$$

Магнитная индукция постоянного магнита – поле диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3(\mathbf{p}_{m0} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}_{m0} \right).$$

Для требуемых в задаче случаев:

$$\mathbf{B} = k \frac{\mu_0 p_{m0}}{4\pi r^3}, \quad k = \begin{cases} 2, & \mathbf{p}_m \uparrow \uparrow \mathbf{r} \\ 1, & \mathbf{p}_m \perp \mathbf{r} \end{cases} \quad (3)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{p_m \frac{\mu_0 k p_{m0}}{4\pi r^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi I_o r^3}{p_m \mu_0 k p_{m0}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi m(a^2 + b^2)r^3}{24\mu_0 k p_m p_{m0}}} = \pi \sqrt{\frac{10^7 m(a^2 + b^2)r^3}{6k p_m p_{m0}}}$$

$$\ln T = A + \frac{3}{2} \ln r.$$

$$A = \ln \left(\pi \sqrt{\frac{10^7 m(a^2 + b^2)}{6k p_m p_{m0}}} \right)$$

$$p_m p_{m0} = \frac{10^7 \pi^2 m(a^2 + b^2)}{6k} e^{-2A} \quad (4)$$

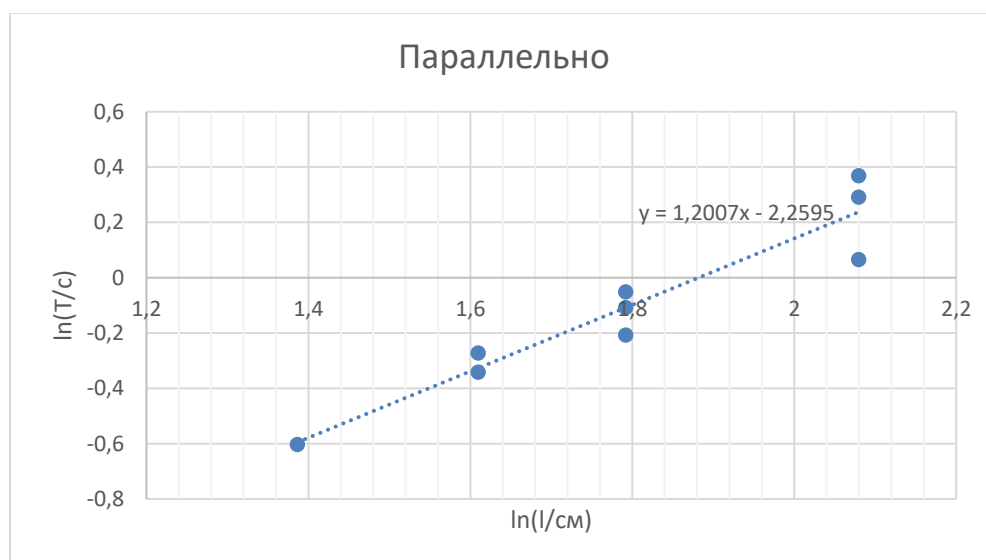
Результаты измерений

$$\ln T = A + C \ln r$$

$$m = 0.69 \text{ г} \quad a = 7 \text{ мм} \quad b = 33 \text{ мм}$$

Параллельная ориентация магнитных моментов

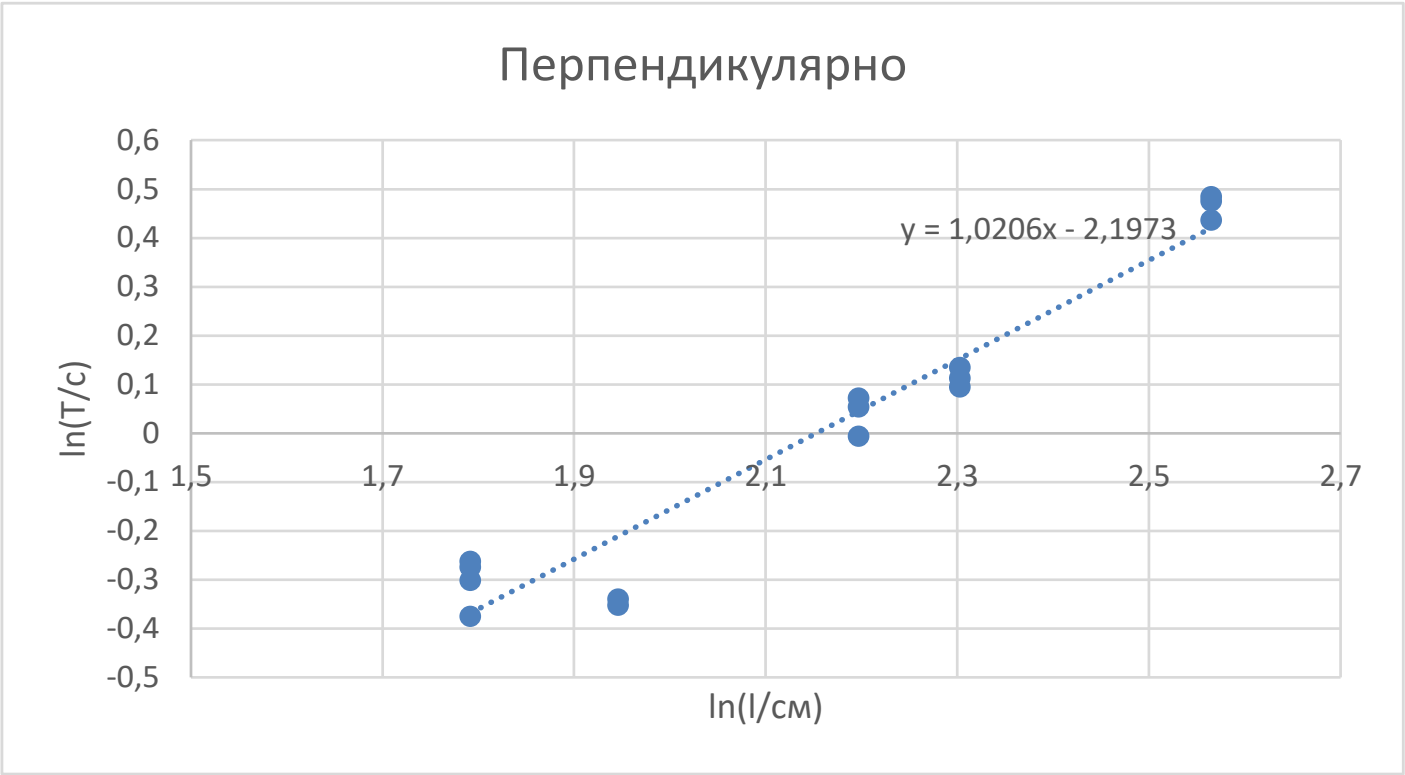
l (см)	t (с)	число полупериодов N	T (с)
8	8,54	16	1,068
8	5,78	8	1,445
8	6,69	10	1,338
6	7,6	16	0,95
6	4,06	10	0,812
6	5,38	12	0,897
4	5,47	20	0,547
5	6,09	16	0,761
5	7,1	20	0,71



Перпендикулярная ориентация магнитных моментов

l , см	t , с	N	T , с
7	7,03	20	0,703
7	7,12	20	0,712
9	10,75	20	1,075
9	9,94	20	0,994
9	10,56	20	1,056
13	6,44	8	1,61
13	6,19	8	1,5475
13	8,12	10	1,624
6	7,4	20	0,74

6	6,87	20	0,687
6	7,69	20	0,769
6	7,6	20	0,76
10	6,6	12	1,1
10	9,16	16	1,145
10	6,72	12	1,12



Анализ результатов

Коэффициенты посчитаны для аппроксимирующих прямых

Параллельно: $C = 1,2$, $A = -2,26$

Перпендикулярно: $C = 1$, $A = -2,20$

Произведение моментов (согласно (4)): $p_m p_{m0} = 1 - 15 \text{ м}^4 \text{А}^2$

Причины расхождения теории и эксперимента:

1) Наличие магнитного поля Земли, которое вносит не зависящий от расстояния вклад в общее магнитное поле.

2) Сравнимость расстояния от магнита до компаса с размером стрелки. В таком случае необходимо учитывать неоднородность поля диполя в пределах стрелки.

Критерии оценивания 11.1

1. Проведены измерения T от r при $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{r}$	1
2. Проведены измерения T от r при $\mathbf{p}_m \perp \mathbf{r}$	1
3. Проведены измерения m , a , b	1
4. Построена зависимость $\ln T$ от $\ln r$ при $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{r}$	1
5. Построена зависимость $\ln T$ от $\ln r$ при $\mathbf{p}_m \perp \mathbf{r}$	1
6. Определен показатель степени C	2
7. Определен коэффициент A при $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{r}$	1
8. Определен коэффициент A при $\mathbf{p}_m \perp \mathbf{r}$	1
9. Выведены формулы (1), (2), (3), (4) – по 1 баллу за каждую	4
10. Определено $p_m p_{m0} = 1 \dots 15 \text{ м}^4 \text{А}^2$	2

Задача 11.2. Давление струи

Сила давления горизонтальной струи жидкости на вертикальную стенку может быть найдена различными способами.

1. Рассмотрим силу, действующую на порцию жидкости массой dm со стороны стенки $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = -\frac{dm}{dt}v = -\frac{\rho S v dt}{dt}v = -\rho S v^2$. По третьему закону Ньютона на стенку действует такая же по модулю, но противоположно направленная сила $F = \rho S v^2$.

2. Альтернативный вывод.

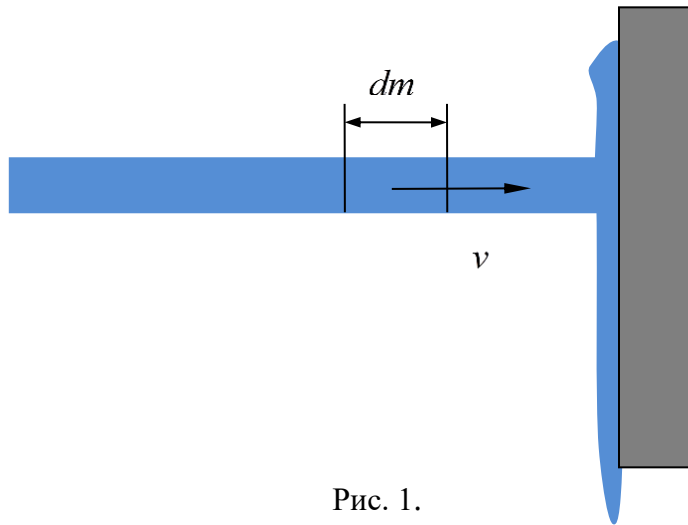


Рис. 1.

$$dF = dm a = dm \frac{dv}{dt} = dm \frac{dv}{dt} = \rho S v dt \frac{dv}{dt} = \rho S \frac{d(v^2)}{2},$$
$$F = \int_v^0 \rho S \frac{d(v^2)}{2} = \frac{\rho S}{2} (0 - v^2) = -\frac{\rho S v^2}{2}.$$

По третьему закону Ньютона на стенку действует сила $F = \rho S v^2 / 2$.

3. Согласно уравнению Мещерского, реактивная сила струи $F = \mu u$, где $\mu = dm/dt$, u – относительная скорость струи. Применяя уравнение к падающей на стенку струе, вновь получаем $F = \rho S v^2$.

4. Из уравнения Бернулли для струи:

$$P_a + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = (P_a + P_w) + \frac{\rho v_{\text{отр}}^2}{2} + \rho g z, \quad P_w = \frac{\rho(v^2 - v_{\text{отр}}^2)}{2} < \frac{\rho v^2}{2}.$$

Получаем: $F < \rho S v^2 / 2$.

Таким образом, сила, действующая на стенку $F_w = k \rho S v^2$. Определите экспериментально, каков на самом деле коэффициент k в исследуемой зависимости. Объясните полученный результат.

Оборудование: штатив, шприц Жане, пластиковая трубка с внутренним диаметром 4 мм, кювета, пластиковый стакан с плоской крышкой, весы с точностью 10 мг (мочить весы нельзя!), брусок, секундомер, линейка. По требованию: ножницы, обычный скотч и двусторонний скотч, вода, салфетки.

Решение

Эксперимент. Соберем конструкцию, представленную на рис. 2. Стакан приклеим к весам двусторонним скотчем. Весы закрепим скотчем в вертикальном положении.

Скорость струи определим по времени истечения выбранного объема жидкости. Отметим, что формула Торричелли неприменима в связи со значительным трением в трубке.

Силу давления определим как показания весов, умноженные на g .

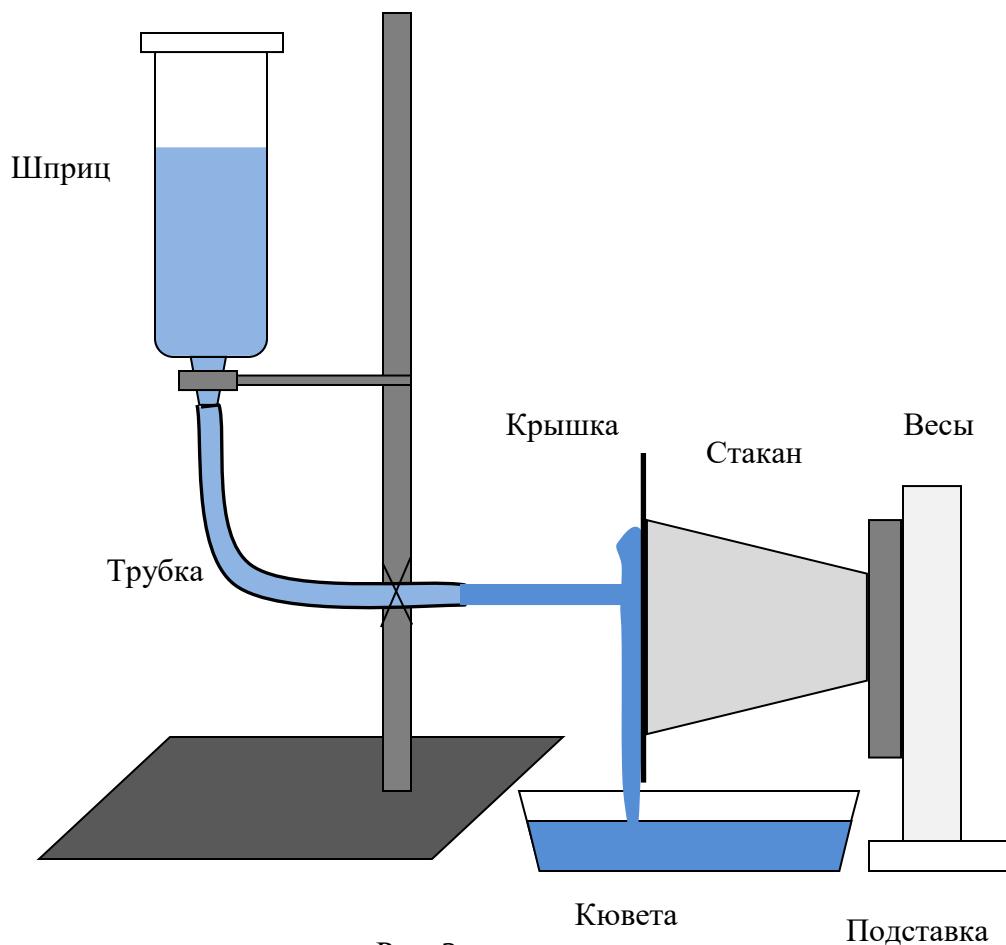


Рис. 2.

На рис. 3 приведены зависимости силы с учетом погрешности, определенной на основе соотношений $F = \rho S v^2$ (красный), $F = \frac{\rho S v^2}{2}$ (зеленый) и на основе показаний весов $F = mg$ (синий).

Таким образом, эксперимент подтверждает случай $k = 1$,

$$F = \rho S v^2. \quad (4)$$

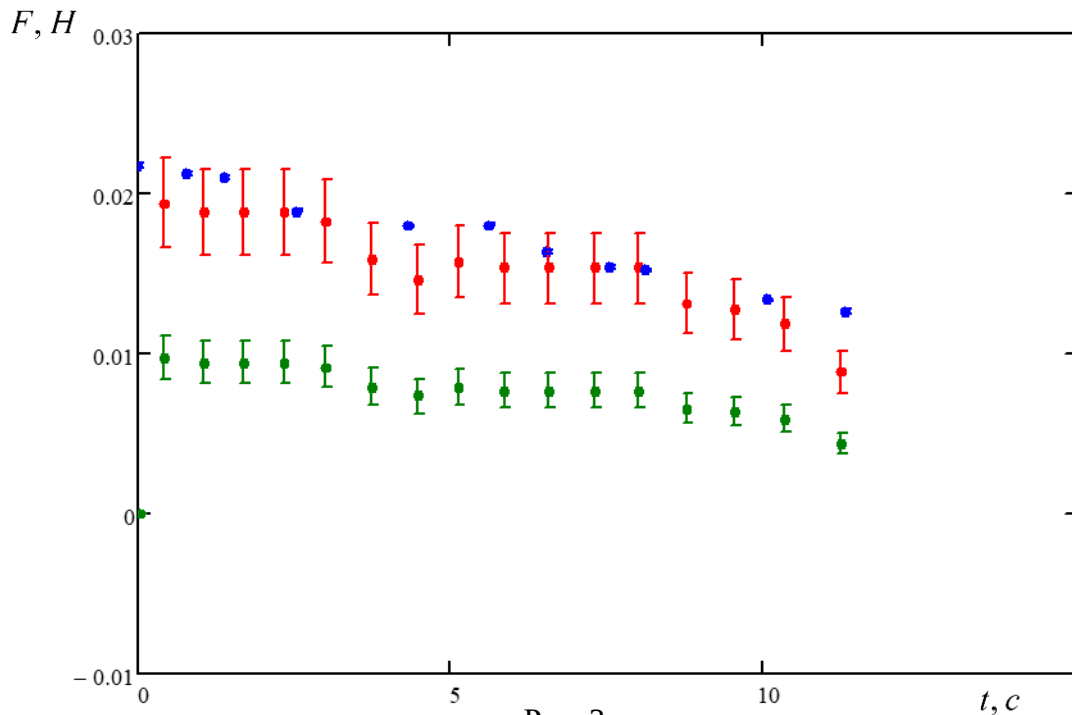


Рис. 3.

3. Запись второго закона Ньютона в импульсной форме с переменной массой в следующем виде некорректна:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = ma + v \frac{dm}{dt},$$

поскольку последнее слагаемое $v \frac{dm}{dt}$ не инвариантно по отношению к переходу в другую инерциальную систему отсчета ($v = v_0 + v'$), тем самым изменяется вид уравнения динамики в различных инерциальных системах отсчета. Это приводит к нарушению принципа относительности Галилея. Для корректности вывода необходимо потребовать, чтобы масса элемента жидкости dm была бы постоянной:

$$dF_j = dm a = dm \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 \rho S dt dv}{dt} = (\rho S v_0) dv$$

$$F_j = \int_0^F dF_j = \rho S v_0 \int_{v_0}^0 dv = -\rho S v_0^2, \quad F_w = -F_j = \rho S v_0^2.$$

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости неприменимо в связи с тем, что удар струи не является абсолютно упругим.

Критерии оценивания 11.2

1. Собрана установка для определения силы давления	3	
2. Определено время истечения выбранного объема жидкости из шприца, 1-2 раза повторные измерения 3-4 раза 5-10 раз >10 раз	0,5 1 1,5 2	
3. Определена скорость истечения струи	2	
4. Определена сила давления на основе весов	2	
5. Оценена погрешность нахождения F по скорости истечения	1	
6. Сделан верный вывод о значении коэффициента k	1	
9. Приведено исчерпывающее объяснение правильного теоретического вывода (причин неверности рассуждений п. 2 и 4) (2+2)	4	