

Городской тур 2024/25. 11 класс

Задача 1. На рисунке красными стрелками представлены силы, действующие на уголок: сила натяжения нити, сила натяжения пружины, сила тяжести (для удобства мы представили отдельно силы тяжести mg и $2mg$, действующую на каждую сторону уголка), а также силу реакции пола N и силу трения $F_{\text{тр}}$ со стороны пола.

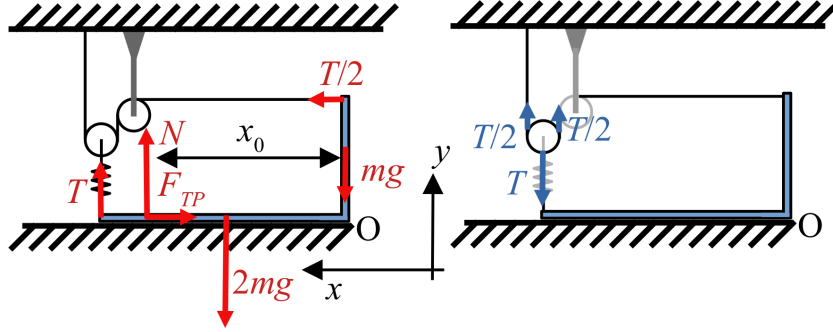


Рис. 1:

Сила натяжения пружины T в два раза больше силы натяжения нити. В этом легко убедиться, если рассмотреть равновесие подвижного блока (силы, действующие на него представлены синими стрелками). Силы N и $F_{\text{тр}}$ приложены к какой-то точке на горизонтальной стороне уголка. Будем считать, что эта точка находится на расстоянии x_0 от прямого угла.

Силы, действующие на уголок, компенсируют друг друга:

$$ox: \quad F_{\text{тр}} = \frac{T}{2}, \quad oy: \quad T + N = 3mg.$$

Чтобы учесть, что уголок не только не смещается, но и не вращается, запишем равенство моментов всех сил. В качестве точки, для которой будем записывать правило моментов, выберем точку O (отметим, что если уголок не вращается вокруг точки O , он не вращается и вокруг любой другой точки – это значит, что правило моментов можно записать относительно любой точки, и получить эквивалентное уравнение):

$$Td + Nx_0 = 2mg \frac{d}{2} + \frac{T}{2} \frac{d}{2}.$$

Здесь мы обозначили длину горизонтальной стороны уголка d (а вертикальной $d/2$). В левой части равенства собраны силы, стремящиеся повернуть уголок по часовой стрелке, считая относительно точки O , а в правой части – против часовой.

То, что уголок покоится в равновесии, означает

- Условие 1: проскальзывания не случилось, то есть сила трения, компенсирующая натяжение нити $T/2$, не превосходит μN .
- Условие 2: уголок не отрывается от пола, то есть $N > 0$. Отрыв происходит в момент, когда $N = 0$.
- Условие 3: точка приложения сил N и $F_{\text{тр}}$ расположена где-то на горизонтальной стороне уголка, то есть

$$0 \leq x_0 \leq d.$$

Запишем эти условия, подставив в них $N = 3mg - T$ и $F_{\text{тр}} = T/2$, выраженные из условия баланса сил. Также подставим в третье условие величину x_0 , выразив её из правила моментов:

$$x_0 = \frac{4mg - 3T}{4N}d = \frac{4mg - 3T}{4(3mg - T)}d.$$

Получим:

Условие 1:

$$\frac{T}{2} \leq \mu N = \mu(3mg - T) \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{T}{2(3mg - T)}.$$

Условие 2:

$$N = (3mg - T) > 0 \quad \Rightarrow \quad T < 3mg.$$

Условие 3:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_0 \leq d \\ 0 &\leq \frac{4mg - 3T}{4(3mg - T)}d \leq d. \end{aligned}$$

Из последнего двойного неравенства получаются два условия на T : $T \leq 4mg/3$ и $T \leq 8mg$.

Итого мы получили три условия на величину натяжения пружины T , из которых самое сложновыполнимое $T \leq 4mg/3$. Если оно выполняется, остальные неравенства в условиях 2 и 3 выполняются автоматически.

Итак, сила натяжения пружины не должна превосходить $4mg/3$. Подставив это в условие 1, получим

$$\mu \geq \frac{T}{2(3mg - T)} = \frac{4mg/3}{2(3mg - 4mg/3)} = 0.4$$

Если натянуть пружину сильнее, нарушится условие 3 ($x_0 \geq 0$). Это значит, что точка приложения сил N и $F_{\text{тр}}$ в равновесии должна быть с другой стороны от прямого угла O . При этом она должна вращать уголок против часовой стрелки, компенсируя моменты остальных сил. Так как это невозможно, уголок перевернётся вокруг O по часовой стрелке.

Последнее рассуждение можно провести иначе. Случай $x_0 < 0$ соответствует ситуации, когда суммарный момент сил mg , T и $T/2$ поворачивает уголок по часовой стрелке. В этом случае уголок обязательно перевернется, если только длинная сторона уголка не приклеена к столу. Но последнее неверно по условию.

Ответ: $T \leq 4mg/3$, $\mu \geq 0.4$. Если натянуть пружину сильнее, а коэффициент трения достаточно большой, проскальзывание не начнётся, но уголок перевернётся вокруг прямого угла O по часовой стрелке.

Задача 2. Вспомним определение теплоёмкости $C = \delta Q/dT$. В этой формуле предполагается, что рассматривается малый процесс около некоторого состояния газа, в ходе которого изменение температуры мало, также как и полученная теплота.

По первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A$$

– теплота, вкачиваемая в систему, тратится на изменение внутренней энергии dU и работу газа $\delta A = PdV$.

Сообразим, когда теплоёмкость газа максимальна. Так как газ может получать теплоту δQ , а температура его может при этом не меняться, $dT = 0$ (в изотермическом процессе), теплоёмкость получится бесконечной. Отметим, что при этом вся теплота будет тратиться на работу газа против каких-то внешних сил.

Значит, если в рассматриваемом цикле есть малый изотермический участок, теплоёмкость на этом участке будет бесконечна, и это именно тот участок, о котором спрашивается в первом вопросе задачи. В некоторые моменты времени t температура газа максимальна или минимальна. На графике зависимости $T(t)$ касательная в этих точках будет горизонтальна, и в окрестности этих точек газ будет совершать изотермический процесс.

На выданном графике максимум и минимум T соответствует максимуму и минимуму $\ln T$ – точкам A и A' (см. график). В окрестности этих точек газ получает или отдаёт теплоту, не меняя температуру, значит теплоёмкость там $\pm\infty$. В крайней левой точке (точке A) V увеличивается, значит, работа газа положительна, газ получает теплоту, $\delta Q > 0$, $dT = 0$ и $C = \delta Q/dT = +\infty$. В крайней правой точке A' работа газа отрицательна, он отдаёт теплоту, $C = -\infty$. Очевидно, точка A – ответ на первый вопрос задачи.

Разберемся теперь с максимумом и минимумом давления. В эти моменты давление газа не меняется, теплоёмкость газа $C_p = 5\nu R/2$. Возможно, по графику удастся определить точки, где теплоёмкость именно такая?

Запишем определение теплоёмкости, подставив в него внутреннюю энергию одноатомного газа $U = 3\nu RT/2$ и уравнение Клапейрона-Менделеева $P = \nu RT/V$:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{dT} = \frac{3\nu R dT}{2dT} + \frac{PdV}{dT} = \frac{3\nu R}{2} + \frac{\nu RT dV}{V dT}.$$

Заметим, что $d \ln V = dV/V$, а $d \ln T = dT/T$, так что последнее слагаемое можно переписать:

$$C = \frac{3\nu R}{2} + \nu R \frac{d \ln V}{d \ln T}. \quad (*)$$

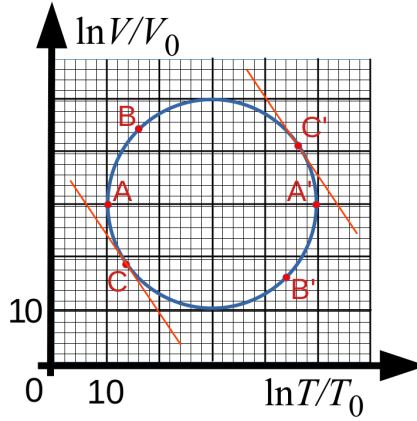


Рис. 2:

Отсюда следует, что теплоёмкость $C_p = 5\nu R/2$ будет, когда второе слагаемое равно νR , а для этого производная $\frac{d \ln V}{d \ln T}$ должна быть равна единице. Этому соответствует точки В и В' на графике.

Наконец, когда газ отдавал теплоту, а потом начал получать, всегда будет момент, когда переданная газу теплота равна нулю. То есть на представленном цикле будут участки, в окрестности которых газ осуществляет малый адиабатический процесс.

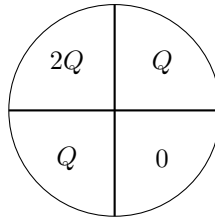
При этом $C = \delta Q/dT = 0$: температура газа меняется без подведения к нему теплоты, $\delta Q = 0$. Если в рассмотренной нами формуле производная $\frac{d \ln V}{d \ln T} = -3/2$, два слагаемых в формуле (*) скомпенсируют друг друга. Несложно найти точки процесса, у которых тангенс угла наклона касательной к окружности равен $-3/2$. Этому соответствует точки С и С'. На интервале CC' газ получает теплоту, а на $C'C$ отдаёт.

Ответ: см. рисунок. Теплоёмкость равна $+\infty$ в точке А. Давление минимально в точке В и максимально в точке В'. На интервале CC' газ получает теплоту, а на $C'C$ отдаёт.

Задача 3. Будем использовать принцип суперпозиции. Представим напряжённость каждого куска в точке наблюдения как сумму вертикальной и горизонтальной компоненты.

Для куска с зарядом Q обозначим вертикальную составляющую напряжённости в точке наблюдения E_v , а составляющую в плоскости потолка E_r . У куска с зарядом $2Q$ это будут, соответственно, $2E_v$ и $2E_r$.

Сначала рассмотрим целую пиццу.



Вертикальные компоненты напряжённости всех заряженных кусков складываются и дают $4E_v$. Куски Q создают противоположно направленные горизонтальные компоненты напряжённости, которые компенсируют друг друга, поэтому суммарная напряжённость имеет в плоскости потолка компоненту $2E_r$, на рисунке она направлена вправо-вниз. Складывая вертикальную и горизонтальную компоненты всех кусков векторно, получим по условию

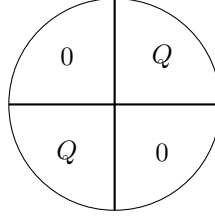
$$\vec{E}_1 = 4\vec{E}_v + 2\vec{E}_r.$$

По теореме Пифагора

$$E_1^2 = 16E_v^2 + 4E_r^2. \quad (1)$$

В задаче есть произвол на выбор куска, который съел Крош. Возможны два случая: он съел кусок с зарядом Q или с зарядом $2Q$ (нейтральный кусок он съесть не мог в силу $E_1 \neq E_2$). Рассмотрим каждый случай.

1. Первый съеденный Крошем кусок имел заряд $2Q$



Вертикальные компоненты напряжённости оставшихся кусков, складываясь, дают теперь $2E_{\text{в}}$, а горизонтальные компоненты компенсируют друг друга. Отсюда

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_{\text{в}} \quad \Rightarrow \quad E_2^2 = 4E_{\text{в}}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{в}}^2 = \frac{E_2^2}{4}.$$

Подставляя найденное $E_{\text{в}}^2$ в (1), получим

$$E_1^2 = 4E_2^2 + 4E_{\text{г}}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{г}}^2 = \frac{E_1^2 - 4E_2^2}{4}.$$

Когда Крош съел второй кусок (с зарядом Q), напряжённость от последнего заряженного куска по модулю

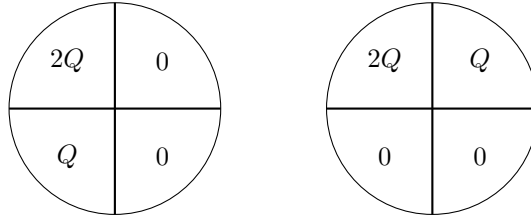
$$E_3 = \sqrt{E_{\text{в}}^2 + E_{\text{г}}^2},$$

что после подстановки найденных $E_{\text{в}}^2$ и $E_{\text{г}}^2$ даёт

$$E_3 = \sqrt{\frac{E_2^2}{4} + \frac{E_1^2 - 4E_2^2}{4}} = \frac{\sqrt{E_1^2 - 3E_2^2}}{2}. \quad (2)$$

2. Первый съеденный Крошем кусок имел заряд Q

Из симметричного расположения кусков Q относительно двух других, для дальнейшего решения неважно, какой из этих кусков съел Крош – одна картинка из другой получается зеркально:



Вертикальные компоненты напряжённости каждого куска, складываясь, дают теперь $3E_{\text{в}}$, а горизонтальные компоненты от кусков Q и $2Q$ взаимно перпендикулярны и равны по модулю $E_{\text{г}}$ и $2E_{\text{г}}$, поэтому суммарно дают горизонтальную компоненту $\sqrt{2^2 + 1}E_{\text{г}} = \sqrt{5}E_{\text{г}}$. Отсюда

$$\vec{E}_2 = 3\vec{E}_{\text{в}} + \sqrt{5}\vec{E}_{\text{г}} \quad \Rightarrow \quad E_2^2 = 9E_{\text{в}}^2 + 5E_{\text{г}}^2.$$

Совместно с (1) это вновь даёт систему уравнений на $E_{\text{в}}$ и $E_{\text{г}}$:

$$\begin{cases} E_1^2 = 16E_{\text{в}}^2 + 4E_{\text{г}}^2 \\ E_2^2 = 9E_{\text{в}}^2 + 5E_{\text{г}}^2 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} E_{\text{в}}^2 = \frac{5E_1^2}{44} - \frac{E_2^2}{11} \\ E_{\text{г}}^2 = \frac{4E_2^2}{11} - \frac{9E_1^2}{44}. \end{cases}$$

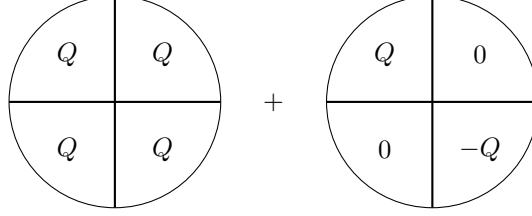
Когда Крош прибегает за следующим лакомством, он съедает кусок, который является заряженным и соседним к недавно съеденному, то есть $2Q$. Напряжённость от оставшегося заряженного куска, как и прежде, складывается из вертикальной и горизонтальной компонент:

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{\text{в}} + \vec{E}_{\text{г}},$$

$$E_3 = \sqrt{E_b^2 + E_r^2} = \sqrt{\frac{5E_1^2}{44} - \frac{E_2^2}{11} + \frac{4E_2^2}{11} - \frac{9E_1^2}{44}} = \sqrt{\frac{3E_2^2 - E_1^2}{11}}. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) дают два возможных ответа задачи.

Примечание: также удобно решать задачу, представив пиццу в виде суперпозиции следующих состояний:



Ответ: $E_3 = \frac{\sqrt{E_1^2 - 3E_2^2}}{2}$, если Крош съедает сначала кусок с зарядом $2Q$, и $E_3 = \sqrt{\frac{3E_2^2 - E_1^2}{11}}$, если Крош съедает сначала кусок с зарядом Q .

Задача 4. По условию не сказано, где расположен источник – ближе к линзе, чем фокусное расстояние, или дальше, то есть действительные изображения или мнимые.

При исходном положении линзы обозначим за d расстояние от источника до плоскости линзы, f – расстояние от плоскости линзы до изображения. Отметим, что f считается положительным, если изображение действительно, и считается отрицательным у мнимых изображений – так как расстояние отсчитывается от линзы до изображения по ходу лучей.

Достаточно рассмотреть два варианта расположения источника: $f < 0$, когда изображение мнимое, и $f > 0$, когда действительное.

1. Мнимое изображение

Так как изображение мнимое, $f = -11F$ и по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{11F} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{11}{12}F. \quad (4)$$

Разумеется, найденное $d < F$, так как мнимое изображение получается, когда предмет ближе к линзе, чем фокусное расстояние.

После поворота расстояние от источника до плоскости линзы $d' = d \cos \theta_1$, источник приблизился к плоскости линзы и по-прежнему ближе к линзе, чем фокальная плоскость. Значит, изображение после поворота не может стать действительным и *остается мнимым*.

Тогда, обозначая за d' и $f' = -9F$ расстояния от источника и изображения до новой плоскости повернутой линзы, снова воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d'} - \frac{1}{9F} \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{9F}{10}. \quad (5)$$

Используя найденные d и d' и учитывая, что $\cos \theta_1 = d'/d$, находим $\cos \theta_1 = 54/55$.

Следовательно первый возможный ответ на вопрос задачи $\theta_1 = \arccos(54/55) \simeq 11^\circ$.

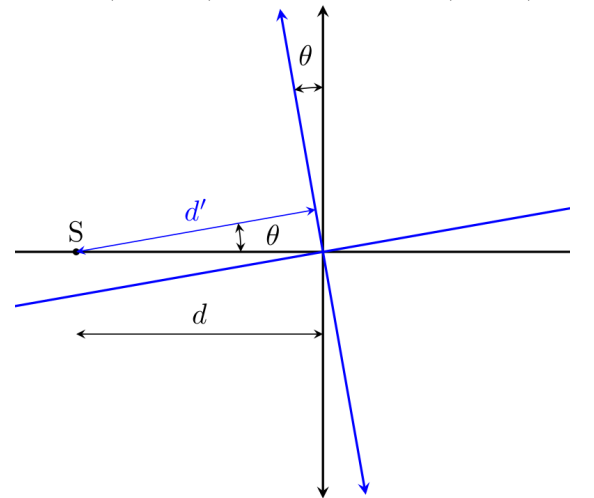
2. Действительное изображение

Изображение действительно, $f = +11F$, и по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{11F} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{11}{10}F. \quad (6)$$

Мы получили, что $d > F$, так как действительное изображение получится, если предмет дальше от линзы, чем фокальная плоскость.

Рис. 3: Точечный источник S и линза – до поворота (черным) и после поворота (синим).



После поворота источник окажется ближе к плоскости линзы. При этом он может приблизиться незначительно, так что изображение останется действительным, но может оказаться ближе к новой плоскости линзы, чем F , и изображение станет мнимым. Рассмотрим оба случая.

2.1 Изображение после поворота осталось действительным

В этом случае $f' = +9F$ формула тонкой линзы после поворота приведёт к новому расстоянию d' :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d'} + \frac{1}{9F} \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{9}{8}F. \quad (7)$$

Однако мы получили, что в этом случае $d' > d$. Но при повороте, как видно из рисунка, d' может только уменьшиться, поэтому этот случай не реализуется.

2.2. После поворота изображение стало мнимым

В этом случае $f' = -9F$ и ответ для положения источника по формуле тонкой линзы уже был получен при рассмотрении первого случая, $d' = 9F/10$. Используя найденное $d = 11F/10$, получим, что $\cos \theta_2 = d'/d = 9/11$. Следовательно возможен еще один ответ на вопрос задачи, $\theta_2 = \arccos(9/11) \simeq 35^\circ$.

Ответ: $\theta_1 = \arccos \frac{54}{55} \simeq 11^\circ$, $\theta_2 = \arccos \frac{9}{11} \simeq 35^\circ$.

Задача 5. При движении переключки с некоторой скоростью V меняется площадь контура, который переключка образует вместе с рельсами. Так как этот контур пронизывают силовые линии магнитного поля, в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = BVL$. В результате конденсатор начинает заряжаться, а через сопротивление течёт некоторый ток I . Пока ток течёт, на переключку действует сила Ампера $F = IBL$, которая по правилу левой руки тормозит её движение.

Второй закон Ньютона для переключки имеет вид $ma = -IBL$. Используем, что ускорение переключки $a = dV/dt$ (ускорение – скорость изменения скорости), а ток в цепи $I = dQ/dt$ (скорость изменения заряда Q на конденсаторе):

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{dQ}{dt} BL.$$

Мы видим, что величины $V(t)$ и $Q(t)$ за любой промежуток времени dt изменяются пропорционально друг другу с одним и тем же коэффициентом пропорциональности $m dV = -dQ BL$. Значит и зависимости $V(t)$ и $Q(t)$ отличаются лишь этим коэффициентом пропорциональности, и значением в начальный момент:

$$V(t) = V_0 - \frac{Q(t)BL}{m},$$

здесь мы учли, что в начальный момент скорость переключки V_0 известна, а конденсатор незаряжен ($Q(0) = 0$). Теперь ясно, что какое-то время переключка будет тормозить, а конденсатор заряжаться.

Запишем закон Кирхгофа для цепи «переключка+рельсы+конденсатор» в момент, когда заряд конденсатора $Q(t)$:

$$BLV(t) = \frac{Q(t)}{C} + RI.$$

Здесь ЭДС индукции создаёт напряжение в контуре (левая часть равенства), которое падает на конденсаторе (первое слагаемое справа) и сопротивлении (второе слагаемое). Подставим сюда найденную зависимость $V(t)$, выраженную через $Q(t)$:

$$BL \left(V_0 - \frac{Q(t)BL}{m} \right) = \frac{Q(t)}{C} + RI.$$

В конце концов ток должен прекратить течь через сопротивление, так как энергия системы конечна, а протекание тока приводит к выделению тепла на сопротивлении. Значит, через большой промежуток времени $I = 0$. Зарядка конденсатора остановится и он приобретёт некоторый постоянный заряд Q_k . Скорость переключки также перестанет меняться:

$$BL \left(V_0 - \frac{Q_k BL}{m} \right) = \frac{Q_k}{C} \quad \Rightarrow \quad Q_k = \frac{BV_0 L}{\frac{B^2 L^2}{m} + \frac{1}{C}}.$$

Этому соответствует конечная скорость переключки

$$V_k = V_0 - \frac{Q_k BL}{m} = \frac{V_0 m}{m + B^2 L^2 C}.$$

Ответ: установившаяся скорость переключки $V_0 m(m + B^2 L^2 C)^{-1}$.