

Городской тур 2024/25. 7 класс

Задача 1.

Вначале разберемся с единицами измерения длины и переведем все единицы в СИ. Один лье определяется как длина дуги, составляющей $1/25$ часть градуса земного меридиана. Учтем, что градусная мера меридиана от северного полюса до экватора соответствует 90 градусам, а соответствующая длина меридиана - 10 миллионов метров. Тогда 1 лье равен $10^7 / 90 / 25 \approx 4444$ метров, а расстояние между домами гроев задачи равно ≈ 88 км 900 м.

Теперь заметим, что в сутках 10 десятичных часов, или 24 обычных часа. Значит в одном десятичном часу 2,4 обычных часа. Тогда скорость движения француза $24 \text{ км} / \text{десятичный час} = 24 \text{ км} / 2,4 \text{ часа} = 10 \text{ км/час}$. Скорость англичанина равна 6 миль/час = $1,609 \times 6 \text{ км/час} \approx 9,65 \text{ км/ч}$.

Француз выехал в 3,5 десятичных часа, что соответствует 8,4 обычным часам или 8 часов 24 минуты. За 36 минут француз проехал ровно 6 км. После этого выезжает англичанин и расстояние между героями уменьшается с суммарной скоростью движения, равной 19,65 км/ч. Тогда встреча произойдет через $(88,9 - 6) \text{ км} / 19,65 \text{ км/ч} \approx 4,22$ часа, или 4 часа 13 минут.

Окончательно получаем, что время встречи 13 часов 13 минут по обычным часам, или 5,51 десятичных часов.

Ответ: примерно 5,51 десятичных часов или 13 часов 13 минут обычного времени

Задача 2.

Рассмотрим ситуацию, когда аппарат уже погружен в воду, но весь трос находится на воздухе. Тогда растяжение троса связано только с приложенным к тросу весом аппарата $\Delta l = P/k = 5$ м. Получается, что трос растянут в 1,5 раза.

Теперь рассмотрим процесс погружения троса в воду. Трос можно условно разделить на две части. Верхняя часть троса находится в воздухе, длина этой части не изменяется. Нижняя часть троса погружена в воду, эта часть троса разбухает в $n = 2$ раза из-за намокания.

Заметим, что в воду погружается верхняя часть троса, не разбухшая. Поэтому скорость v относится к верхней части троса. Трос изначально растянут весом аппарата, скорость погружения можно разделить на два слагаемых. Погружение начальной длины троса происходит со скоростью $vl_0/(l_0 + \Delta l) = 12 \text{ см/мин}$. Второе слагаемое в скорости погружения связано с растяжением троса $v\Delta l/(l_0 + \Delta l) = 6 \text{ см/мин}$. Эта часть при намокании троса не изменяется поскольку не изменяется жесткость троса. После разбухания в воде начальная длина троса увеличивается, поэтому скорость опускания аппарата можно представить как $nv l_0/(l_0 + \Delta l) + v\Delta l/(l_0 + \Delta l) = 30 \text{ см/мин}$.

Ответ: 30 см/мин.

Задача 3.

Обозначим скорость муравья на пути туда $v + u$, а на пути обратно - v . Здесь $u = 12 \text{ см/мин}$ - изменение скорости муравьёв, когда они несут иголку. Обозначим Δt время между муравьями в цепочке. Очевидно, что когда все муравьи разворачивались в одной точке, время между муравьями в цепочке одинаково на пути туда и на пути обратно. Расстояние между муравьями в цепочке на пути обратно можно выразить как $v\Delta t$. Пусть Ферда идёт из муравейника за иголкой и он только что встретил муравья, который несёт иголку обратно в муравейник. Расстояние между Фердой и муравьём, которого он встретит через $\tau = 1$ минуту, равно $n_1 v \Delta t$. Скорость сближения Ферды и этого муравья равна $2v + u$. Тогда $n_1 v \Delta t = (2v + u)\tau$. Когда Ферда идет обратно, он встречает n_2 муравьёв за время $\tau = 1$ минута. Это условие можно записать в виде $n_2(v + u)\Delta t = (2v + u)\tau$. Вравнивая эти два условия получаем, что $n_2(v + u) = n_1 v$, откуда $v = n_2 u / (n_1 - n_2) = 48 \text{ см/мин}$. Зная скорости находим время между муравьями в цепочке $\Delta t = \tau(2v + u) / n_1 v = 9/80 \text{ мин} = 6,75 \text{ сек}$. То есть муравьи приносят одну иголку каждые 6,75 секунд, а значит за 1 час они приносят $3600 / 6,75 \approx 533$ иголок.

На пути обратно Ферда также встречает 16 муравьёв в минуту, значит время между муравьями в цепочке, идущей от муравейника не изменилось. Перед разворотом каждому следующему муравью необходимо пройти дополнительное расстояние ΔS . Тогда время между муравьями увеличивается на $\Delta S / (v + u) + \Delta S / v$. С другой стороны, можем выразить время между муравьями в цепочке как $\Delta t_2 = \tau(2v + u) / n_2 v$.

$$\frac{\tau(2v + u)}{n_1 v} + \frac{\Delta S}{v + u} + \frac{\Delta S}{v} = \frac{\tau(2v + u)}{n_2 v}$$

Преобразуем это выражение

$$\Delta S \frac{(2v + u)}{v(v + u)} = \tau \frac{2v + u}{v} \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2}$$

Выражаем

$$\Delta S = \tau(v + u) \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2} = 0.75 \text{ см}$$

Ответ: ≈ 533 иголки за час, расстояние $\Delta S = 0.75$ см.

Задача 4.

Плотность материала кубика равна ρ_0 . Обозначим плотность пластика, которым Пётр заполняет отверстия, $\tilde{\rho}$. На первом шаге Павел удалил 7 из 27 кубиков, тогда плотность Губки после первого шага получилась равна

$$\rho_1 = \frac{20}{27}\rho_0 + \left(1 - \frac{20}{27}\right)\tilde{\rho}$$

На втором шаге каждый из 20 маленьких кубиков делится на 27 кубиков и 7 из них удаляются. Тогда остаётся $\frac{20^2}{27^2}$ часть от исходного куба, а оставшаяся часть заполнена пластиком. Средняя плотность куба на втором шаге равна

$$\rho_2 = \frac{20^2}{27^2}\rho_1 + \left(1 - \frac{20^2}{27^2}\right)\tilde{\rho}$$

Далее, зная значения ρ_0 и ρ_1 , несложно выразить $\tilde{\rho}$ и явно подставить в выражение выше. Однако, можно привести рассуждение, которое будет работать на любом шаге. Можем переписать выражения для ρ_1 и ρ_2 в следующем виде

$$\rho_0 = \tilde{\rho} + (\rho_0 - \tilde{\rho})$$

$$\rho_1 = \tilde{\rho} + \frac{20}{27}(\rho_0 - \tilde{\rho})$$

$$\rho_2 = \tilde{\rho} + \frac{20^2}{27^2}(\rho_0 - \tilde{\rho})$$

Заметим, что $\rho_2 = \frac{47}{27}\rho_1 - \frac{20}{27}\rho_0$. Причём аналогичное соотношение будет верно и для плотности кубика на следующих шагах, например $\rho_3 = \frac{47}{27}\rho_2 - \frac{20}{27}\rho_1$. После подстановки числовых значений получаем $\rho_2 = 1790 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: Плотность куба после второго шага $\rho_2 = 1790 \text{ кг/м}^3$.

Задача 5.

Обозначим скорость заливания воды в сосуд v , площадь сечения сосуда S , а длины сторон кубиков 1, 2 и 3 как a_1 , a_2 и a_3 соответственно. Вода заполняет пространство сосуда, свободное от кубиков. Тогда можем записать:

$$vt_1 = (S - a_3^2 - a_2^2)a_2$$

$$vt_2 = Sa_3 - a_3^3 - a_2^3$$

$$vt_3 = S(a_1 + a_3) - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3$$

$$vt_4 = (S - a_3^2 - a_1^2)a_1$$

$$vt_5 = Sa_3 - a_1^3 - a_2^3$$

$$vt_6 = S(a_2 + a_3) - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3$$

$$vt_7 = Sa_3 - a_3^3$$

Обозначим искомое время погружения кубика 2 как t_8 , а время погружения всей конструкции как t_9 . Можем записать

$$vt_8 = S(a_2 + a_3) - a_2^3 - a_3^3$$

$$vt_9 = S(a_1 + a_2 + a_3) - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3$$

Заметим, что $vt_7 - vt_5 = a_1^3$. Тогда можем записать

$$vt_8 = vt_6 + a_1^3 = vt_6 + vt_7 - vt_5$$

$$t_8 = t_6 + t_7 - t_5 = 138 \text{ с}$$

Заметим, что $vt_3 - vt_2 = Sa_1 - a_1^3$ и $vt_6 - vt_5 = Sa_2 - a_2^3$. Тогда можем записать

$$\begin{aligned} vt_9 &= vt_7 + (vt_6 - vt_5) + (vt_3 - vt_2) \\ t_9 &= t_7 + t_6 + t_3 - t_5 - t_2 = 216 \text{ с} \end{aligned}$$

Ответ: Вода поднялась до верха кубика 2 через 156 с и до верха кубика 1 через 216 с.

Задача 6.

Из-за суточного вращения Земли вокруг своей оси звёзды движутся по небу с востока на запад, совершая один оборот в сутки. Поскольку оба корабля движутся с запада на восток, можно сделать вывод, что направление вращения кораблей совпадает с направлением вращения Земли. Причем Афина обгоняет Землю на 11 оборотов за сутки, значит Афина сама совершает вокруг центра Земли 12 оборотов в сутки. Аврора делает 2 оборота вокруг центра Земли в сутки.

Далее заметим, что длина орбиты пропорциональна её радиусу, а значит отношение длин орбит Авроры и Афины равно отношению радиусов орбит R_2/R_1 . Тогда отношение расстояний, которые Аврора и Афина пролетают за сутки равно $2R_2/12R_1$. С другой стороны, это отношение равно отношению скоростей кораблей $2R_2/12R_1 = v_2/v_1$. Откуда выражаем $v_2 = \frac{2R_2}{12R_1} v_1 \approx 3870 \text{ м/с}$.

Ответ: скорость вращения Авроры по орбите равна 3870 м/с.

Задача 7.

Рассмотрим начальное состояние системы, без подвешенного груза. На нижний поршень снизу действует атмосферное давление P_a , а сверху – давление воды. Из условия равновесия поршня следует, что давление воды около нижнего поршня равно атмосферному давлению. Обозначим расстояние между поршнями h , тогда давление воды около верхнего поршня будет равно $P_a - \rho gh$. Сверху вниз на поршень давит атмосферное давление, также поршень вверх тянет пружина, силу упругости которой можно представить в виде $F_{\text{упр}} = k\Delta l$. Условие равновесия верхнего поршня можно записать в виде

$$P_a S_1 - \rho gh S_1 = P_a S_1 - k\Delta l$$

Также заметим, что вес сосуда с водой уравнивается силой упругости трёх пружин.

Когда к нижнему поршню подвесили груз, поршень сместился относительно сосуда. Пусть нижний поршень сместился вниз на расстояние x относительно сосуда. Тогда, из условия несжимаемости жидкости, следует что верхний поршень сместился относительно сосуда вниз на расстояние xS_2/S_1 . Сам сосуд после подвешивания груза тоже сместился в результате сжатия амортизирующих пружин. Обозначим смещение сосуда y . Относительно неподвижных точек опоры верхний поршень опустился вниз на $y + xS_2/S_1$, значит сила упругости верхней пружины увеличилась на $ky + kxS_2/S_1$. У каждой из двух нижних пружин сила упругости увеличилась на ky . Сумма сил упругости трёх пружин увеличилась на $3ky + kxS_2/S_1 = mg$.

Далее можем записать условие равновесия нижнего поршня с подвешенным грузом. Если обозначить давление воды около поршня как P_2 , то $P_2 S_2 + mg = P_a S_2$. После смещения поршня на x расстояние между поршнями стало равно $h + x - xS_2/S_1$. Давление воды около верхнего поршня $P_1 = P_2 - \rho g(h + x - xS_2/S_1)$. Тогда условие равновесия верхнего поршня можно записать в виде:

$$P_2 S_1 - \rho g(h + x - xS_2/S_1) S_1 + k(\Delta l + xS_2/S_1 + y) = P_a S_1$$

Вычтем из этого условия условие равновесия поршня до подвешивания груза и получим:

$$-mgS_1/S_2 - \rho g(x - xS_2/S_1) S_1 + k(xS_2/S_1 + y) = 0$$

Подставим $mg = 3ky + kxS_2/S_1$.

$$(3ky + kxS_2/S_1) S_1/S_2 + \rho g(x - xS_2/S_1) S_1 = k(xS_2/S_1 + y)$$

Условие того, что груз не сместится после подвешивания к системе можно выразить как $x = -y$. С учётом этого условия выражение преобразуется к виду

$$\rho g(S_1 - S_2) S_1 S_2 = k(S_2^2 - S_1 S_2) + 3kS_1^2 - kS_1 S_2$$

Выражаем жёсткость пружин и получаем ответ

$$k = \frac{\rho g(S_1 - S_2)S_1 S_2}{3S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2}$$

Ответ: жёсткость пружин $k = \frac{\rho g(S_1 - S_2)S_1 S_2}{3S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2}$