

Городской тур 2024/25. 8 класс

Задача 1. Непрозрачный эксперимент.

Вначале заметим, что изломам графика соответствует граница какого-то кубика. На графике 3 излома, на высоте 5, 10 и 18 см. Излому на высоте 5 см может соответствовать кубик с длиной ребра 5 см, или, например, два кубика с длиной ребра 2,5 см, лежащие один на другом. Аналогично для излома на высоте 10 см, это может быть один кубик с ребром 10 см, или два кубика с ребром 5 см.

На первом участке от 0 до 5 см в сосуд налили 250 см^3 воды, следовательно площадь сосуда, свободная от кубиков, на этом участке равна 50 см^2 . на втором участке, от 5 до 10 см, налили 375 см^3 воды. Значит свободная площадь сосуда равна 75 см^2 . Заметим, что свободная площадь сосуда выросла на 25 см^2 , что соответствует площади кубика с длиной ребра 5 см. Поскольку излом на графике наблюдался как раз на высоте 5 см, делаем вывод, что на дне сосуда есть кубик с ребром 5 см.

Следующий излом графика находится на высоте 10 см. Соответствующая свободная площадь сосуда равна 36 см^2 . Если предположить, что внизу стоит кубик с ребром 10 см, а сверху кубик с ребром 8 см, то свободная площадь должна увеличиться на $10^2 - 8^2 = 36 \text{ см}^2$. А в нашем случае свободная площадь сосуда, наоборот, уменьшилась. Можно поставить 2 кубика с ребром 8 см рядом, тогда свободная площадь изменится на $10^2 - 2 \times 8^2 = -28^2$. Если от 5 до 10 см свободная площадь сосуда была равна 75 см^2 , она должна стать равной 47 см^2 . Этот вариант тоже не подходит. Можно предположить, что внизу в сосуде стоят 2 кубика с ребром 5 см, один на другом. Верхняя граница этих кубиков будет как раз на высоте 10 см. Тогда последний кубик стоит сверху на них и имеет длину ребра 8 см. Изменение свободной площади $5^2 - \times 8^2 = -39^2$, что соответствует изменению свободной площади от 75 см^2 до 36 см^2 .

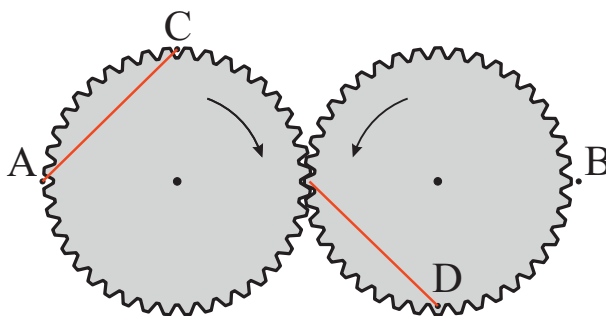
Ответ: внизу 2 кубика с ребром 5 см, на них стоит кубик с ребром 5 см, сверху кубик с ребром 8 см.

Задача 2. Муравей на карусели.

Очевидно, что муравей должен перебраться с одной шестеренки на другую в точке из соприкосновения. Если за все время движения муравья от точки А до точки В шестеренки повернулись на полоборота, то когда муравей оказался в точке соприкосновения шестеренок, прошла половина всего времени, а шестеренки повернулись на четверть оборота.

Значит муравей должен идти по шестеренке в точку С на рисунке по кратчайшему пути (отрезок АС). За это время шестеренка повернется и точка С окажется в месте соприкосновения шестеренок. Шестеренка со скоростью v прошла четверть длины окружности, то есть $\pi R / 2$, за это время муравей проползает расстояние $\sqrt{2} R$. Значит скорость муравья $u = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} v$.

Аналогично по второй шестерёнке муравей пробегает до точки D, а шестеренка поворачивается на четверть оборота так, что точка D оказывается рядом с В.



Ответ: корость муравья $u = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} v$.

Задача 3. Откачка азота.

За первые 10 минут эксперимента уровень жидкого азота в сосуде опустился на $\Delta h = 125 \text{ мм}$, значит объём жидкого азота, который испарился и был откачан, равен $\Delta h S$. Масса испарившегося азота $m = \rho \Delta h S$ равна массе газообразного азота, который откачали из сосуда за 10 минут или 600 секунд. Тогда плотность откачиваемого газообразного азота

$$\rho_r = \frac{\rho \Delta h S}{600V} \approx 0,36 \text{ г/л} = 0,36 \text{ кг/м}^3$$

Через 10 минут на графике появляется излом. Поскольку скорость откачки азота осталась прежней, излом может быть связан только с кристаллизацией (замерзанием) азота. Кристаллический азот имеет более высокую

плотность, поэтому при кристаллизации уровень азота в сосуде уменьшается. За время с 10й по 20ю минуту уровень понизился на $\Delta h = 125$ мм за счёт испарения азота и еще на $\Delta h_2 = 148$ мм за счёт кристаллизации жидкого азота. Для испарения азота газу необходимо передать теплоту испарения $Q = Lm$. Если азот находится при температуре кристаллизации, то это тепло может выделяться только при кристаллизации жидкого азота $Q = \lambda \Delta M$. Здесь ΔM – масса закристаллизовавшегося азота. Изменение объёма азота можно найти как

$$\frac{\Delta M}{\rho_{\text{тв}}} - \frac{\Delta M}{\rho} = \Delta h_2 S$$

Учтём, что из уравнения баланса тепла $\delta M = Lm/\lambda = \rho \Delta h SL/\lambda$ и получим:

$$\rho_{\text{тв}} = \frac{\Delta M}{\Delta h_2 S + \frac{\Delta M}{\rho}}$$

$$\rho_{\text{тв}} = \frac{\rho \Delta h L / \lambda}{\Delta h_2 + \Delta h L / \lambda} \approx 1026 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: плотность газообразного азота $\approx 0,36 \text{ кг/м}^3$, плотность твёрдого азота $\approx 1026 \text{ кг/м}^3$.

Задача 4. Губка Менгера.

Вначале ответим на первый вопрос. Если фигура в каждом месте состоит из 8 слоёв бумаги, то площадь 1го самого маленького квадратика в фигуре в 8 раз меньше, чем площадь листочка 9 на 9 см, из которого делают модули. А длина стороны маленького квадратика в $\sqrt{8}$ раз меньше длины стороны листочка. Как видно из рисунка, сторона большого куба в 9 раз больше длины стороны маленького квадрата. Тогда сторона куба равна $\frac{9 \times 9}{\sqrt{8}} \approx 28,6$ см.

Для того, чтобы найти массу всей модели, нужно посчитать количество модулей, из которых состоит модель. Для этого посчитаем количество маленьких квадратиков (модулей), которые обращены на рисунке вперёд. Затем полученное количество умножим на 6, в силу симметрии картинка. Заметим, что губку Менгера можно строить не только вырезанием квадратиков из середины. Можно на каждом шаге уменьшать кубик в 3 раза по всем направлениям, а потом из 20 таких уменьшенных кубиков собирать фигуру следующего шага. В исходном кубике 1 грань, которая смотрит вперёд. В фигуре 1го шага вперёд смотрят 8 квадратов на передней грани и еще 4 квадрата на заднем ряду кубиков. В фигуре 2го шага по аналогии будет $8 + 4$ квадратов, которые соержжат по 8 маленьких квадратиков (без 1го квадратика в центре). Кроме того, в каждом из 20 кубиков будет содержаться по 4 квадратика нужно го направления внутри вырезов. Суммарно получаем $12 \times 8 + 20 \times 4 = 176$ квадратиков, которые смотрят вперёд. Всего фигура содержит $176 \times 6 = 1056$ маленьких квадратиков. Тогда масса фигуры равна массе 1056 листочков со стороной 9 см^2 , площадь 1056 листочков равна $85698 \text{ см}^2 \approx 8,57 \text{ м}^2$. Тогда масса всей губки Менгера на втором шаге будет $\approx 686 \text{ г}$.

Ответ: длина стороны куба $\approx 28,6$ см, масса $\approx 686 \text{ г}$.

Задача 5. Кот учёный.

Рассмотрим условие равновесия доски. Пусть кот дошёл по доске максимально далеко вправо. Если кот еще чуть-чуть пройдёт вправо, доска потеряет равновесие и будет поворачиваться вокруг правого угла ящика. Значит в положении равновесия правый угол ящика будет точкой опоры. Если центр масс доски находится на расстоянии x от правого угла, то кот может находиться не дальше, чем на расстоянии xM/m . Аналогично рассматриваем случай, когда кот идёт по доске влево. Тогда центр масс доски находится на расстоянии $a - x$ от левого края, а кот может пройти на расстояние не больше, чем $(a - x)M/m$ от левого края. Суммарно кот может пройти по доске расстояние $(a - x)M/m + a + xM/m = a(M + m)/m$. Получается, что максимальное расстояние, которое кот может пройти по доске, не зависит от положения доски. Но только если доска достаточно длинная.

Если длина доски будет равна $a(M + m)/m$, кот сможет пройти по всей доске только если она будет лежать на ящике симметрично. Если доска будет сдвинута относительно центра ящика вправо, кот не сможет пройти на максимальное расстояние по доске влево потому что доска окажется недостаточно длинной.

Если же длина доски будет меньше, чем $a(M + m)/m$, то кот сможет пройти по всей доске не только при симметричном положении доски, но и при небольшом смещении доски из симметричного положения. Поэтому условие задачи может быть выполнено только если длина доски в точности равна $a(M + m)/m$.

Ответ: длина доски равна $a(M + m)/m$.

Задача 6. Подогрев пластилина.

Через достаточно большое время шары хорошо прогрелись. Это значит, что температура шаров не изменяется, а мощность нагревателя равна мощности теплопотерь в окружающую среду. Мощность теплопотерь пропорциональна площади поверхности шара, то есть пропорциональна квадрату радиуса шара. Тогда мощность теплопотерь можно представить в виде $P = \alpha R^2(T - T_0)$. Здесь α - некоторый коэффициент, не зависящий от радиуса шара. Поскольку нагреватели одинаковые, в установившемся режиме можем записать равенство мощностей теплопотерь $\alpha R^2(T_1 - T_0) = \alpha 2,25 R^2(T_2 - T_0)$. Здесь $T_1 = 83^\circ\text{C}$ - установившаяся температура 1го шара. Из уравнения получаем, что установившаяся температура второго шара $T_2 = 48^\circ\text{C}$.

Рассмотрим процесс остывания маленького шара от температуры T_3 до температуры T_4 . Пусть эти температуры будут достаточно близкими, так чтобы можно было считать $T_3 = T_4$ везде, где не считается разность этих температур. Уравнение теплового баланса запишется в виде

$$mc(T_3 - T_4) = \alpha R^2(T_3 - T_0)\Delta t$$

Здесь Δt обозначает время остывания маленького шара от T_3 до T_4 .

Аналогично можно записать уравнение теплового баланса для остывания большого шара от температуры T_3 до T_4

$$1.5^3 mc(T_3 - T_4) = \alpha 1.5^2 R^2(T_3 - T_0)\Delta t_2$$

Здесь учтено, что масса пропорциональна кубу размера шара, а площадь поверхности - квадрату размера. Из уравнения теплового баланса получаем, что $\Delta t_2 = 1.5\Delta t$, то есть время остывания большого шара в 1.5 раза больше времени остывания маленького шара при тех же температурах. Тогда и полное время остывания большого шара от 48°C до 28°C займёт в 1.5 раза больше времени, чем остывание маленького шара до соответствующих температур. Для маленького шара по графику определяем, что температура была равна 48°C в 325 секунд, а 28°C - в 825 секунд. Тогда время остывания маленького шара равно 500 секунд, а время остывания большого шара - 750 секунд.

Дальнейшее остывание не отображено на графике. Поэтому будем рассчитывать остывание теоретически. Рассмотрим остывание от температуры $T_{48} = 48^\circ\text{C}$. За малый промежуток времени Δt большой шарик остынет на

$$\Delta T_1 = \frac{\alpha R^2(T_{48} - T_0)\Delta t}{1.5mc}$$

Аналогично при остывании от температуры $T_{28} = 28^\circ\text{C}$ шарик за время Δt остынет на

$$\Delta T_2 = \frac{\alpha R^2(T_{28} - T_0)\Delta t}{1.5mc}$$

Начальная разность температур шарика и окружающей среды во втором случае в $8/28$ раза меньше. Из уравнения теплового баланса получаем, что изменение температуры также будет в $8/28$ раза меньше. Следовательно и температура через время Δt при остывании от 28°C также будет в $8/28$ раза меньше.

Разобьём процесс остывания от температуры 48°C до температуры 28°C на много малых интервалов времени Δt каждый. В начале процесса остывания отношение разности температур шара и окружающей среды во втором случае отличается в $8/28$ раза. Изменение температур за первый промежуток времени Δt отличается также в $8/28$ раза. Тогда и отношение разности температур в конце первого (начале второго) промежутка Δt также будет отличаться в $8/28$ раза. Далее аналогичными рассуждениями несложно показать, что в конце k -го промежутка времени разность температур шара и окружающей среды будет отличаться в $8/28$ раза. Значит через время $2t_{28}$ температура большого шара будет равна $(T_{28} - T_0) \cdot 8/28 + T_0 \approx 22.3^\circ\text{C}$.

Ответ: Температура большого шара 48°C , остывание до 28°C займёт 750 секунд, температура большого шара через $2t_{28}$ будет $\approx 22.3^\circ\text{C}$.

Задача 7. Сообщающиеся сосуды.

Рассмотрим момент, когда система пришла в равновесие. Обозначим атмосферное давление p_0 , а силу упругости стержня, который соединяет поршни S и $3S$ как F . Очевидно, что без жесткой связи между поршнями вода из трубки вылилась бы в нижний сосуд. Это значит, что стержень мешает поршню площади S подниматься вверх, а значит стержень растянут. Тогда давление воды над поршнем S будет равно $p_1 = p_0 - F/S$, а давление воды под поршнем $3S$ будет равно $p_3 = p_0 - F/3S$. С другой стороны, эти точки сообщаются через воду в трубке, поэтому разность давлений должна быть равна гидростатическому давлению $p_3 - p_1 = \rho gl$. Подставим явные

выражения для давлений $2F/3S = \rho gl$, откуда $F = 3\rho glS/2$. Тогда давление воды под поршнем площади $3S$ равно $p_3 = p_0 - \rho gl/2$. Давление воды под поршнем площади $5S$ равно p_0 , значит этот поршень находится на $l/2$ ниже, чем поршень $3S$.

Пусть для прихода в равновесие поршень $3S$ поднялся вверх на расстояние x . Тогда в правый сосуд перетёк объём воды $3Sx$. Поршень S также поднялся на расстояние x вверх. Тогда по трубке в левый сосуд перетёк объём воды xS . Суммарно объём воды в левом сосуде уменьшился на $2Sx$. Заметим, что в поршень площади $5S$ вставлена трубка площади S , при движении поршня вода в трубке остаётся, поэтому эффективная площадь сечения поршня в левом сосуде равна $4S$. Для того, чтобы объём воды в левом сосуде уменьшился на $2Sx$ нужно, чтобы поршень опустился вниз на $x/2$. Суммарно разность уровней поршней в левом и правом сосудах равна $3x/2 = l/2$, откуда Поршень $3S$ поднялся на $x = l/3$, а поршень $5S$ опустился на $x/2 = l/6$.

Теперь рассмотрим случай, когда на поршень $5S$ наливают воду. Если уровень воды над поршнем равен h , давление воды под поршнем будет равно $p_5 = p_0 + \rho gh$. Давление воды под поршнем площади $3S$, как и раньше, будет равно $p_3 = p_0 - \rho gl/2$. Отсюда разница уровней поршней равна $l/2 + h$. Так же как и в первом пункте задачи, поршень площади $3S$ должен подняться на $2/3$ этой высоты относительно положения, когда поршни в сосудах были на одном уровне. А поршень площади $5S$ — опуститься на $l/6 + h/3$. Получаем, что поршень площади $5S$ будет опускаться со скоростью $v/3$.

Ответ: Поршень $3S$ поднялся на $x = l/3$, поршень $5S$ опустился на $x/2 = l/6$. При наливании воды поршень будет опускаться со скоростью $v/3$.