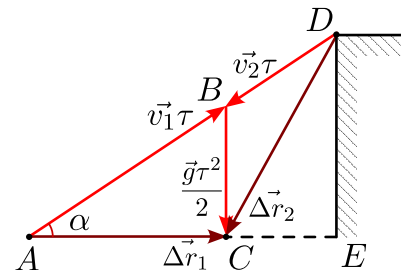


Задача 1. Два друга

Первое решение. Наиболее коротко задача может быть решена векторным методом. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ — начальные скорости камней Андрюши и Бори соответственно. На рисунке изображён треугольник их перемещений. Действительно, перемещение тела за время t при равноускоренном движении с ускорением $\vec{g}$, начальной скоростью $\vec{v}_0$ равно

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$



Заметим, что треугольники ABC и ADE подобны с коэффициентом $\frac{n}{n+1}$. Значит, высота сарая

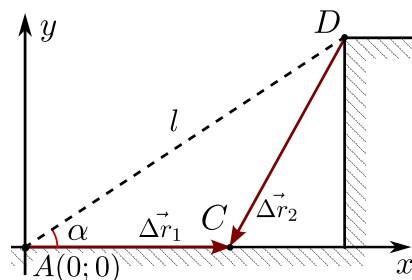
$$h = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2}.$$

Расстояние между мальчиками

$$l = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2 \sin \alpha} = 30 \text{ м.}$$

Второе решение. Введём систему координат (см. рисунок). В момент выстрела Андрюша находился в точке $A(0; 0)$, а Боря — в точке $D(l \cos \alpha; l \sin \alpha)$. Пусть $C(x; y)$ — точка падения камней. Обозначим v — модуль начальной скорости камня Бори. Движение камней вдоль оси абсцисс равномерное, а вдоль оси ординат равноускоренно, причём проекция ускорения на ось y равна $-g$. Таким образом,

$$x = nv\tau \cos \alpha, \quad y = nv\tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2};$$



$$x = l \cos \alpha - v\tau \cos \alpha, \quad y = l \sin \alpha - v\tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Приравняв уравнения движения вдоль оси абсцисс, получим:

$$v = \frac{l}{(n+1)\tau}.$$

Заметим, что точка C находится на прямой абсцисс, значит, $y = 0$. Таким образом,

$$\frac{nl \sin \alpha}{n+1} = \frac{g\tau^2}{2} \Leftrightarrow l = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2 \sin \alpha} = 30 \text{ м.}$$

Ответ: $l = 30 \text{ м.}$

Задача 2. Кубик под водой

Пусть $m = \rho V = \rho a^3$ — масса кубика. Для начала рассмотрим процесс его равномерного подъёма. Движение осуществляется под действием силы тяжести $m\vec{g}$, силы Архимеда $\vec{F}_A$ ($F_A = \rho_0 g V$) и силы $\vec{F}_2$. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

В проекции на вертикальную ось

$$-mg + F_A + F_2 = 0 \Leftrightarrow -\rho g V + \rho_0 g V + F_2 = 0,$$

откуда находим плотность металла

$$\rho = \rho_0 + \frac{F_2}{ga^3}.$$

Теперь рассмотрим момент отрыва кубика от дна. Поскольку вода под его основание не подтекает, силу Архимеда нельзя вычислять по указанной выше формуле. Вместо этого воспользуемся общим подходом: найдём силу гидростатического давления воды на куб. Силы, действующие на боковые грани, в силу симметрии компенсируют друг друга. Сила давления на верхнюю грань направлена вниз и равна

$$F_d = pS = \rho_0 g h a^2,$$

где $p = \rho_0 g h$ — давление воды на глубине h . Применим второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_d + \vec{F}_1 = \vec{0}.$$

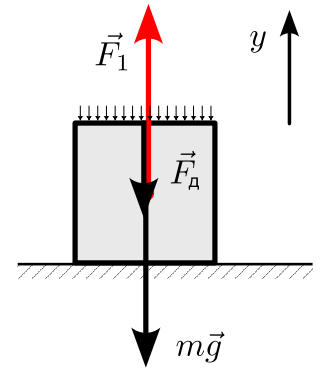
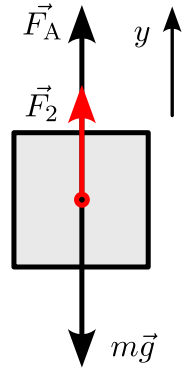
В проекции на вертикальную ось

$$-mg - F_d + F_1 = 0 \Leftrightarrow -\rho g a^3 - \rho_0 g h a^2 + F_1 = 0,$$

откуда находим искомую глубину

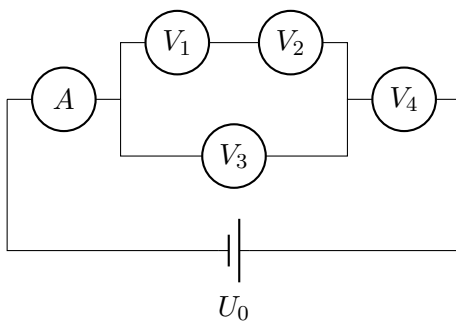
$$h = -a \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{F_1}{\rho_0 g a^2} = \frac{F_1 - F_2}{\rho_0 g a^2} - a.$$

Ответ: 1. $\rho = \rho_0 + \frac{F_2}{ga^3}$. 2. $h = \frac{F_1 - F_2}{\rho_0 g a^2} - a$.



Задача 3. Цепь из измерительных приборов

Поскольку в цепи течёт ток, вольтметры не являются идеальными. Пронумеруем вольтметры. Заметим, что исходная схема эквивалентная следующей:



Показания вольтметров V_1 и V_2 равны, причём их сумма равна падению напряжения на вольтметре V_3 по закону параллельного соединения. Значит, $V_1 = V_2 < V_3$. Поскольку $I_3 < I_4$ (так обозначены токи, текущие через вольтметры), то $V_3 = I_3 R < I_4 R = V_4$. Именно в этом месте мы воспользовались идентичностью вольтметров.

Таким образом, минимальные показания у первого и второго вольтметров: $V_1 = V_2 = V$.

В силу указанных выше соотношений, $V_3 = 2V$. Найдём показания четвёртого вольтметра, используя соотношение между токами $I_2 + I_3 = I_4$:

$$V_4 = IR = (I_2 + I_3) R = V_2 + V_3 = 3V.$$

Таким образом,

$$R = \frac{3V}{I} = 1 \text{ МОм.}$$

Напряжение источника

$$U_0 = V_3 + V_4 = 5V = 5 \text{ В.}$$

Ответ: 1. $R = 1 \text{ МОм}$. 2. $U_0 = 5 \text{ В}$.

Задача 4. Вода в стакане

Сначала определим температуру воды после таяния льда. Записываем уравнение теплового баланса:

$$M_{\text{в}}c(T_1 - T_*) = m_{\text{л}}\lambda + m_{\text{л}}c(T_* - T_2),$$

откуда после преобразований получаем:

$$T_* = \frac{M_{\text{в}}cT_1 + m_{\text{л}}cT_2 - m_{\text{л}}\lambda}{(M_{\text{в}} + m_{\text{л}})c} \approx 74^\circ\text{C}.$$

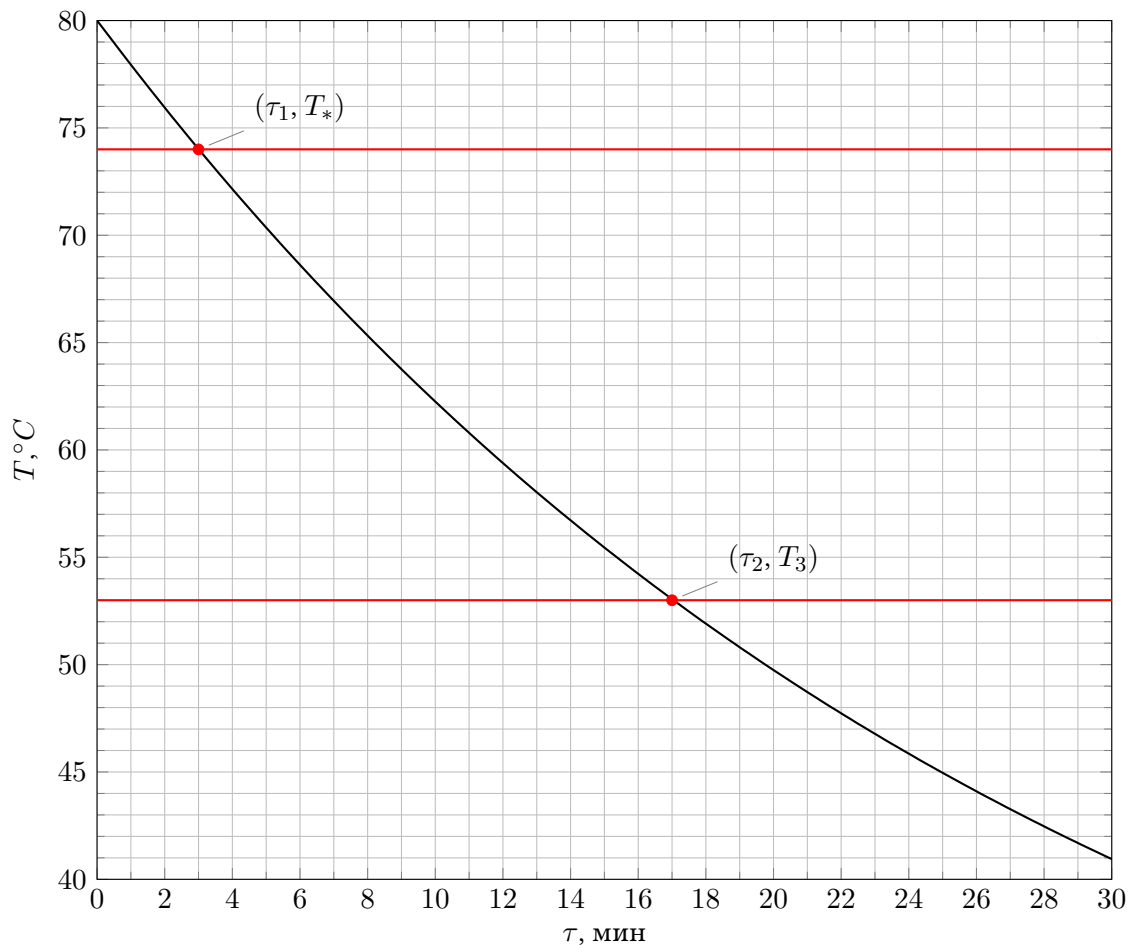
Запишем теперь количество теплоты, которое уходит из стакана за малое время $\Delta\tau$ и приравняем его количеству теплоты, выделяющемуся при охлаждении содержимого стакана, находящегося при температуре T , на величину $|\Delta T|$:

$$\chi h(T - T_0)\Delta\tau = -c\rho Sh\Delta T,$$

где ρ — плотность воды, S — площадь сечения стакана, h — уровень воды в нем, а знак *минус* появился, поскольку вода в стакане остывает. Сокращая на величину h получаем следующую пропорциональность:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\tau} \propto T - T_0.$$

Здесь мы учли, что площадь сечения стакана, плотность и удельная теплоёмкость воды, а также коэффициент χ — постоянные величины. Таким образом, зависимость температуры содержимого от времени подчиняется одному и тому же уравнению вне зависимости от количества воды в стакане, а значит мы можем использовать приведенный график для определения температуры воды (отсчитывая время от точки на графике, соответствующей температуре T_*).



Из графика получаем $\tau_1 = 3$ мин, $\tau_2 = 17$ мин. Окончательный ответ $\Delta\tau = 14$ мин.

Ответ: 1. $T_* = 74^\circ\text{C}$. 2. $\Delta\tau = 14$ мин.

Задача 5. Слепой коптер

Пусть помещение заполнено водой до высоты h , а коптер в этот момент находится на высоте y .

Первое решение. Сигналы, отправленные сонаром в направлении потолка и пола комнаты, вернутся спустя время

$$\tau_1 = \frac{2(H - y)}{v_{\text{возд}}} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{2(y - h)}{v_{\text{возд}}} + \frac{2h}{v_{\text{вод}}}$$

соответственно. Поскольку среда коптера — воздух, измеренные сонаром расстояния l_1 и l_2 до потолка и пола соответственно, находятся следующим образом:

$$\tau_1 = \frac{2l_1}{v_{\text{возд}}}, \quad \tau_2 = \frac{2l_2}{v_{\text{возд}}},$$

$$l_1 = H - y, \quad l_2 = y - h + h \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}.$$

Коптер запрограммирован таким образом, чтобы поддерживать расстояние до потолка большим расстояния до пола в $k = 3$ раз, поэтому

$$l_1 = kl_2.$$

В момент погружения коптера в воду $y = h$, поэтому

$$H - h = kh \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \Leftrightarrow h = \frac{H}{1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}}.$$

Поскольку $q = 2$ л/с — объёмный расход воды, то $u = \frac{q}{AB}$ — скорость заполнения комнаты водой. Значит, искомое время:

$$t = \frac{HAB}{q \left(1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)} = 7,3 \text{ ч.}$$

Второе решение. На полу растёт плоскопараллельная пластинка из воды, через которую коптер слышит пол так, как если бы он находился к нему ближе. Насколько ближе?

Сонар измеряет расстояние, засекая время до возвращения звукового импульса и умножает его половину на скорость звука в среде. Среда коптера — воздух. Коптер будет считать себя находящимся на высоте

$$z = v_{\text{возд}} \left(\frac{y - h}{v_{\text{возд}}} + \frac{h}{v_{\text{вод}}} \right) = y - h \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right).$$

Данное мнимое расстояние благодаря программе коптера будет связано с расстоянием до потолка ($k = 3$):

$$kz = H - y.$$

Следовательно, сам коптер находится на высоте

$$y = \frac{H + kh \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)}{k + 1}.$$

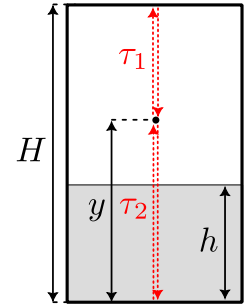
Коптер утонет, когда станет $y = h$, то есть

$$(k + 1)h = H + kh \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right) \Leftrightarrow h = H - kh \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \Leftrightarrow h = \frac{H}{1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}}.$$

Поскольку $q = 2$ л/с — объёмный расход воды, то $u = \frac{q}{AB}$ — скорость заполнения комнаты водой. Значит, искомое время:

$$t = \frac{HAB}{q \left(1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)} = 7,3 \text{ ч.}$$

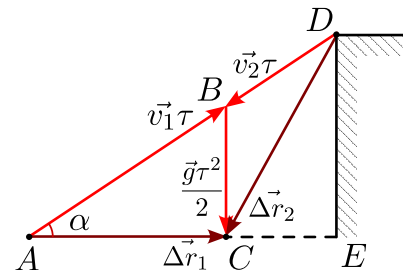
Ответ: $t = 7,3$ ч.



Задача 1. Два друга

Первое решение. Наиболее коротко задача может быть решена векторным методом. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ — начальные скорости камней Алёши и Богдана соответственно. На рисунке изображён треугольник их перемещений. Действительно, перемещение тела за время t при равноускоренном движении с ускорением $\vec{g}$, начальной скоростью $\vec{v}_0$ равно

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$



Заметим, что треугольники ABC и ADE подобны с коэффициентом $\frac{n}{n+1}$. Значит, высота сарая

$$h = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2}.$$

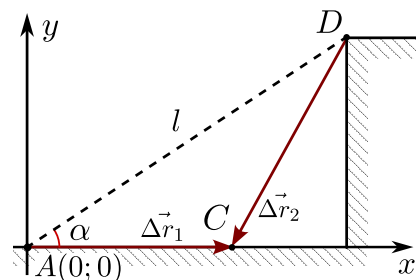
Расстояние между мальчиками

$$l = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2 \sin \alpha} = 60 \text{ м.}$$

Второе решение. Введём систему координат (см. рисунок). В момент выстрела Алёша находился в точке $A(0; 0)$, а Богдан — в точке $D(l \cos \alpha; l \sin \alpha)$. Пусть $C(x; y)$ — точка падения камней. Обозначим v — модуль начальной скорости камня Богдана. Движение камней вдоль оси абсцисс равномерное, а вдоль оси ординат равноускоренно, причём проекция ускорения на ось y равна $-g$. Таким образом,

$$x = nv\tau \cos \alpha, \quad y = nv\tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2};$$

$$x = l \cos \alpha - v\tau \cos \alpha, \quad y = l \sin \alpha - v\tau \sin \alpha - \frac{g\tau^2}{2}.$$



Приравняв уравнения движения вдоль оси абсцисс, получим:

$$v = \frac{l}{(n+1)\tau}.$$

Заметим, что точка C находится на прямой абсцисс, значит, $y = 0$. Таким образом,

$$\frac{nl \sin \alpha}{n+1} = \frac{g\tau^2}{2} \Leftrightarrow l = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{g\tau^2}{2 \sin \alpha} = 60 \text{ м.}$$

Ответ: $l = 60 \text{ м.}$

Задача 2. Кубик под водой

Пусть $m = \rho V = \rho a^3$ — масса кубика. Рассмотрим процесс его равномерного подъёма. Движение осуществляется под действием силы тяжести $m\vec{g}$, силы Архимеда $\vec{F}_A$ ($F_A = \rho_0 g V$) и силы $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F} = \vec{0}.$$

В проекции на вертикальную ось

$$-mg + F_A + F = 0 \Leftrightarrow -\rho g V + \rho_0 g V + F = 0,$$

откуда находим плотность металла

$$\rho = \rho_0 + \frac{F}{ga^3}.$$

Теперь рассмотрим момент отрыва кубика от дна. Поскольку вода под его основание не подтекает, силу Архимеда нельзя вычислять по указанной выше формуле. Вместо этого воспользуемся общим подходом: найдём силу гидростатического давления воды на куб. Силы, действующие на боковые грани, в силу симметрии компенсируют друг друга. Сила давления на верхнюю грань направлена вниз и равна

$$F_{\text{д}} = pS = \rho_0 g(h - a)a^2,$$

где $p = \rho_0 g(h - a)$ — давление воды на глубине $h - a$. Применим второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{д}} + \vec{F}_0 = \vec{0}.$$

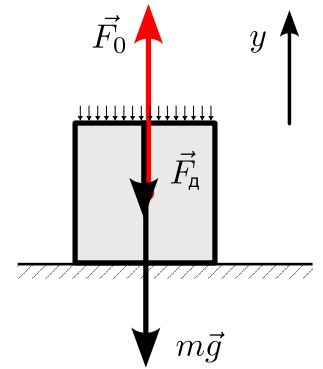
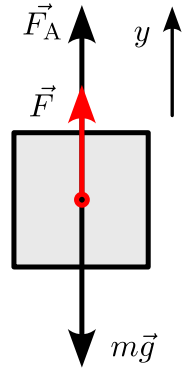
В проекции на вертикальную ось

$$-mg - F_{\text{д}} + F_0 = 0 \Leftrightarrow -\rho ga^3 - \rho_0 g(h - a)a^2 + F_0 = 0,$$

откуда находим искомую силу

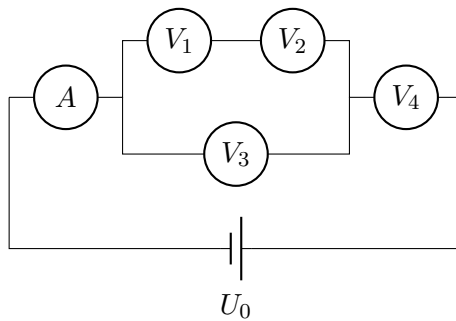
$$F_0 = F + \rho_0 ga^2 h.$$

Ответ: 1. $\rho = \rho_0 + \frac{F}{ga^3}$. 2. $F_0 = F + \rho_0 ga^2 h$.



Задача 3. Цепь из измерительных приборов

Поскольку в цепи течёт ток, вольтметры не являются идеальными. Пронумеруем вольтметры. Заметим, что исходная схема эквивалентная следующей:



Показания вольтметров V_1 и V_2 равны, причём их сумма равна падению напряжения на вольтметре V_3 по закону параллельного соединения. Значит, $V_1 = V_2 < V_3$. Поскольку $I_3 < I_4$ (так обозначены токи, текущие через вольтметры), то $V_3 = I_3 R < I_4 R = V_4$. Именно в этом месте мы воспользовались идентичностью вольтметров.

Таким образом, минимальные показания у первого и второго вольтметров: $V_1 = V_2 = V$.

В силу указанных выше соотношений, $V_3 = 2V$. Найдём показания четвёртого вольтметра, используя соотношение между токами $I_2 + I_3 = I_4$:

$$V_4 = IR = (I_2 + I_3) R = V_2 + V_3 = 3V.$$

Таким образом,

$$R = \frac{3V}{I} = 1 \text{ МОм.}$$

Напряжение источника

$$U_0 = V_3 + V_4 = 5V = 10 \text{ В.}$$

Ответ: 1. $R = 1 \text{ МОм}$. 2. $U_0 = 10 \text{ В}$.

Задача 4. Вода в стакане

Сначала определим температуру воды после таяния льда. Записываем уравнение теплового баланса:

$$M_{\text{в}}c(T_1 - T_*) = m_{\text{л}}\lambda + m_{\text{л}}c(T_* - T_2),$$

откуда после преобразований получаем:

$$T_* = \frac{M_{\text{в}}cT_1 + m_{\text{л}}cT_2 - m_{\text{л}}\lambda}{(M_{\text{в}} + m_{\text{л}})c} \approx 83^\circ\text{C}.$$

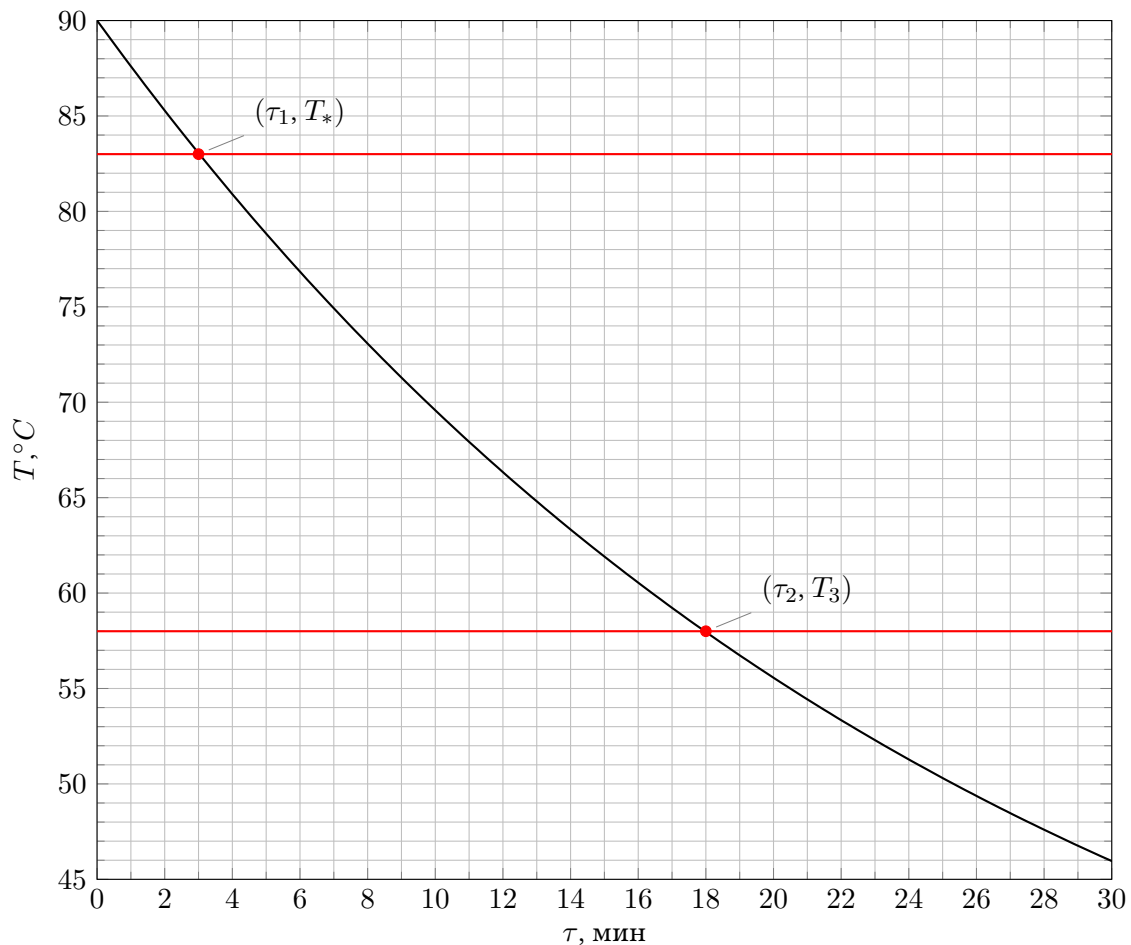
Запишем теперь количество теплоты, которое уходит из стакана за малое время $\Delta\tau$ и приравняем его количеству теплоты, выделяющемуся при охлаждении содержимого стакана, находящегося при температуре T , на величину $|\Delta T|$:

$$\chi h(T - T_0)\Delta\tau = -c\rho Sh\Delta T,$$

где ρ — плотность воды, S — площадь сечения стакана, h — уровень воды в нем, а знак *минус* появился, поскольку вода в стакане остывает. Сокращая на величину h получаем следующую пропорциональность:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\tau} \propto T - T_0.$$

Здесь мы учли, что площадь сечения стакана, плотность и удельная теплоёмкость воды, а также коэффициент χ — постоянные величины. Таким образом, зависимость температуры содержимого от времени подчиняется одному и тому же уравнению вне зависимости от количества воды в стакане, а значит мы можем использовать приведенный график для определения температуры воды (отсчитывая время от точки на графике, соответствующей температуре T_*).



Из графика получаем $\tau_1 = 3$ мин, $\tau_2 = 18$ мин. Окончательный ответ $\Delta\tau = 15$ мин.

Ответ: 1. $T_* = 83^\circ\text{C}$. 2. $\Delta\tau = 15$ мин.

Задача 5. Слепой коптер

Пусть помещение заполнено водой до высоты h , а коптер в этот момент находится на высоте y .

Первое решение. Сигналы, отправленные сонаром в направлении потолка и пола комнаты, вернутся спустя время

$$\tau_1 = \frac{2(H - y)}{v_{\text{возд}}} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{2(y - h)}{v_{\text{возд}}} + \frac{2h}{v_{\text{вод}}}$$

соответственно. Поскольку среда коптера — воздух, измеренные сонаром расстояния l_1 и l_2 до потолка и пола соответственно, находятся следующим образом:

$$\tau_1 = \frac{2l_1}{v_{\text{возд}}}, \quad \tau_2 = \frac{2l_2}{v_{\text{возд}}},$$

$$l_1 = H - y, \quad l_2 = y - h + h \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}.$$

Коптер запрограммирован таким образом, чтобы поддерживать расстояние до потолка большим расстояния до пола в $k = 4$ раз, поэтому

$$l_1 = kl_2.$$

В момент погружения коптера в воду $y = h$, поэтому

$$H - h = kh \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \Leftrightarrow h = \frac{H}{1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}}.$$

Поскольку $q = 2$ л/с — объёмный расход воды, то $u = \frac{q}{AB}$ — скорость заполнения комнаты водой. Значит, искомое время:

$$t = \frac{HAB}{q \left(1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)} = 4,6 \text{ ч.}$$

Второе решение. На полу растёт плоскопараллельная пластинка из воды, через которую коптер слышит пол так, как если бы он находился к нему ближе. Насколько ближе?

Сонар измеряет расстояние, засекая время до возвращения звукового импульса и умножает его половину на скорость звука в среде. Среда коптера — воздух. Коптер будет считать себя находящимся на высоте

$$z = v_{\text{возд}} \left(\frac{y - h}{v_{\text{возд}}} + \frac{h}{v_{\text{вод}}} \right) = y - h \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right).$$

Данное мнимое расстояние благодаря программе коптера будет связано с расстоянием до потолка ($k = 4$)

$$kz = H - y.$$

Следовательно, сам коптер находится на высоте

$$y = \frac{H + kh \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)}{k + 1}.$$

Коптер утонет, когда станет $y = h$, то есть

$$(k + 1)h = H + kh \left(1 - \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right) \Leftrightarrow h = H - kh \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \Leftrightarrow h = \frac{H}{1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}}}.$$

Поскольку $q = 2$ л/с — объёмный расход воды, то $u = \frac{q}{AB}$ — скорость заполнения комнаты водой. Значит, искомое время:

$$t = \frac{HAB}{q \left(1 + k \frac{v_{\text{возд}}}{v_{\text{вод}}} \right)} = 4,6 \text{ ч.}$$

Ответ: $t = 4,6$ ч.

