

Задача 1. Медный всадник: двести лет спустя**Авторское решение (Матвей Муравьев).**

1. Время, затраченное героями, чтобы добраться до середины Невы одинаково и равно $t_1 = \frac{d/2}{v}$. За это время каждого из них снесло вниз по течению на расстояние $l_1 = u \cdot t_1$.

Герои смогут встретиться, если Прасковья,двигающаяся по середине Невы, не успеет достигнуть Благовещенского моста и повернуть к берегу. То есть время сближения $t_2 = \frac{L}{2v}$ должно быть меньше времени, необходимого Прасковье, чтобы достичь моста $t_3 = \frac{L-l_1}{v+u}$:

$$t_2 < t_3.$$

Решая записанное неравенство, получаем:

$$v > \frac{L+d}{L}u.$$

2. В системе отсчёта Евгения коробка конфет имеет компоненты скорости $v_x = v_m \cos \alpha$ по горизонтали и $v_y = v_m \sin \alpha$ по вертикали, а Прасковья движется к нему с горизонтальной скоростью $2v$. Начальное расстояние между конфетами и Прасковьей $l = L - 2vt_0$, поскольку герои одновременно достигли середины реки, за время движения до неё обоих снесло на одинаковое расстояние; спустя время t_0 расстояние между ними уменьшилось на $2vt_0$.

Время в полёте $t = 2v_y/g$, за это время коробка конфет должна достигнуть лодки Прасковьи: преодолевается расстояние $(v_x + 2v)t = l$.

Подставляя выражение для времени, получаем квадратное уравнение на v_m :

$$v_m^2 + \frac{2v}{\cos \alpha} v_m - \frac{gl}{\sin 2\alpha} = 0.$$

Только один из двух корней положительный:

$$v_m = -\frac{v}{\cos \alpha} + \sqrt{\frac{v^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Подставляя известную величину угла, получаем:

$$v_m = -\sqrt{2}v + \sqrt{2v^2 + g(L - 2vt_0)} = 13,4 \text{ м/с}.$$

Максимальная высота подъема коробки конфет

$$h = v_y t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_m^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_m^2}{4g}.$$

Ответ: $v_{\min} = (1 + d/L)u = 1,28 \text{ м/с}; h_{\max} = 4,59 \text{ м}.$

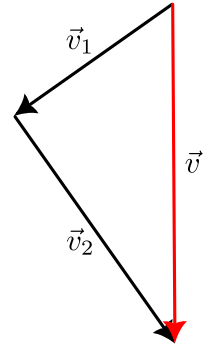
Задача 2. Пингвинята

Авторское решение (Иван Савельев).

Пусть $\vec{v}$ — скорость первого пингвинёнка прямо перед соударением; $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ — скорости первого и второго пингвинят соответственно сразу после удара. Поскольку удар абсолютно упругий, применимы законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} m\vec{v} &= m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2, \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \end{aligned}$$

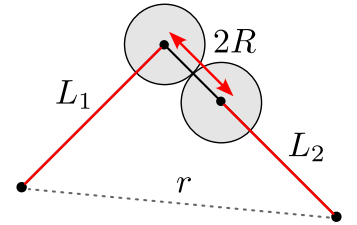
где m — масса каждого из пингвинят. Таким образом, векторы $\vec{v}, \vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ образуют треугольник, причём $v^2 = v_1^2 + v_2^2$. Согласно обратной теореме Пифагора, треугольник скоростей прямоугольный.



Пусть L_1, L_2 — расстояния, которые проехали после удара первый и второй пингвин соответственно. Определим эти расстояния с помощью закона изменения кинетической энергии:

$$-\frac{mv_{1,2}^2}{2} = A_{\text{тр}} = -\mu mg L_{1,2}, \quad L_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g}, \quad L_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g}.$$

Заметим, что скорость $\vec{v}_2$ второго пингвина после удара направлена вдоль прямой, соединяющей центры пингвинов (шайб). Действительно, именно вдоль этой прямой была направлена сила реакции первого пингвина во время удара. Таким образом, треугольник перемещений пингвинов после удара имеет вид, указанный на рисунке справа. Согласно теореме Пифагора, конечное расстояние r между центрами шайб:



$$r = \sqrt{L_1^2 + (L_2 + 2R)^2}.$$

Проанализируем подкоренное выражение на минимум. Преобразуем:

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + 4RL_2 + 4R^2 &= (L_1 + L_2)^2 - 2L_1L_2 + 4RL_2 + 4R^2 = \\ &= \frac{v^4}{4(\mu g)^2} - 2L_2 \left(\frac{v^2}{2\mu g} - L_2 - 2R \right) + 4R^2 = \frac{v^4}{4(\mu g)^2} + 2 \left(L_2^2 - \left(\frac{v^2}{2\mu g} - 2R \right) L_2 \right) + 4R^2. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемое постоянны. Второе является квадратичной функцией L_2 . Минимум достигается при $L_2 = \frac{v^2}{4\mu g} - R$. Искомое расстояние:

$$r = \sqrt{2} \left(R + \frac{v^2}{4\mu g} \right) = 8,98 \text{ м.}$$

Отметим, что в этом случае прямоугольный треугольник перемещений оказывается равнобедренным.

Ответ: $r = \sqrt{2} \left(R + \frac{v^2}{4\mu g} \right) = 8,98 \text{ м.}$

Примечание. Для нахождения минимума можно воспользоваться неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{L_1^2 + (L_2 + 2R)^2}{2}} \geq \frac{L_1 + L_2 + 2R}{2} = \frac{v^2}{4\mu g} + R,$$

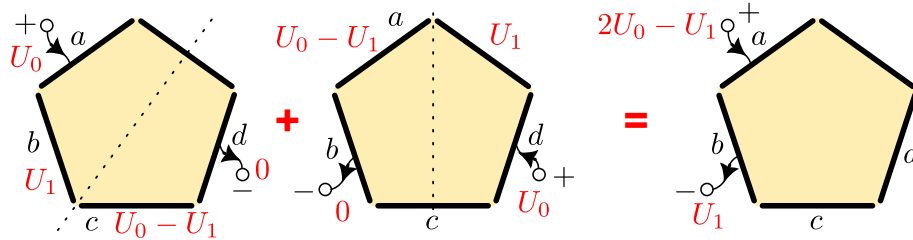
откуда мгновенно получается ответ и условие, при котором выполнено равенство.

Задача 3. Пятиугольники

Авторское решение (Константин Родионенко).

1. Чтобы определить эквивалентное сопротивление между рёбрами a и b , рассмотрим два таких пятиугольника. К первому подключим источник напряжения U_0 к рёбрам a и d , а ко второму — к рёбрам d и b . Зафиксировав нулевым потенциал отрицательной клеммы источника, определим потенциалы рёбер a и b в каждом из случаев.

Для этого воспользуемся тем, что описанные способы подключения источника к пятиугольнику симметричны данному в условии. Действительно, $\varphi_a - \varphi_c = U_1$ для первой схемы и $\varphi_d - \varphi_a = U_1$ для второй. Кроме того, при расстановке потенциалов использовано соображение симметрии схемы: на рисунках указаны плоскости антисимметрии. В первой схеме, например, это влечёт $\varphi_a - \varphi_c = \varphi_b - \varphi_d$.



Применим принцип суперпозиции и «наложим» два пятиугольника друг на друга. Поскольку токи в описанных схемах одинаковы и равны $I = U_0/R$ (способы подключения источника симметричны данному в условии), то при наложении имеем схему, в которой ток втекает в ребро a и вытекает из ребра b . При этом разность потенциалов

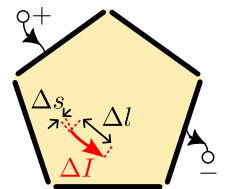
$$\varphi_a - \varphi_b = (2U_0 - U_1) - U_1 = 2(U_0 - U_1).$$

Искомое эквивалентное сопротивление

$$R_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{I} = R \cdot \frac{2(U_0 - U_1)}{U_0}.$$

2. Рассмотрим один пятиугольник при подключении источника к двум рёбрам. Картина токов имеет сложную структуру. Выделим малый элемент тока силой ΔI , протекающий по малому кусочку пятиугольника, имеющему длину Δl , ширину Δs и толщину h . Падение напряжения между концами этого элемента согласно закону Ома равно

$$\Delta U = \Delta I r = I \rho \cdot \frac{\Delta l}{h \Delta s},$$



где r — сопротивление кусочка, ρ — удельное сопротивления листа.

Зафиксируем ток в пятиугольнике. Заметим, что при уменьшении линейных размеров пятиугольника в k раз, уменьшается в k раз как длина Δl , так и ширина Δs каждого кусочка. Таким образом, сопротивление r , а значит, и падение напряжения ΔU остаётся постоянным. Поэтому напряжение между всеми парами рёбер не изменится, и все эквивалентные сопротивления останутся прежними.

Если же увеличить толщину листа в два раза, то эквивалентное сопротивление между всеми парами рёбер уменьшится в два раза.

Заметим, что исследуемая схема есть последовательное сопротивление трёх пластин. Объединяя сказанное, искомое сопротивление

$$R_2 = R + R_1 + \frac{R_1}{2} = R \left(1 + \frac{3(U_0 - U_1)}{U_0} \right).$$

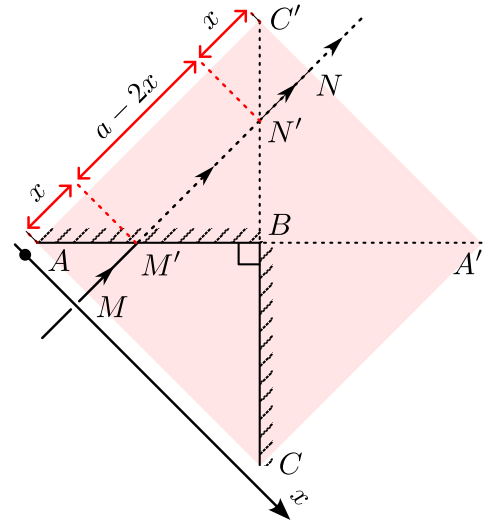
Ответ: $R_1 = R \cdot \frac{2(U_0 - U_1)}{U_0}$, $R_2 = R \cdot \frac{4U_0 - 3U_1}{U_0}$.

Задача 4. Мутная задача

Авторское решение¹ (Иван Гурьянов).

Чтобы проследить за траекторией произвольного падающего луча, построим изображения зеркал друг в друге; также построим изображения поглощающей среды (см. рисунок). Область ABC' на рисунке соответствует отражению в зеркале AB , область CBA' – отражению в BC , а область $A'BC'$ – двукратному отражению.

Введём ось X вдоль AC с началом в точке A . Рассмотрим луч, падающий в точку M с координатой $x \leq a/2$. Построим продолжение этого луча вплоть до точки N его пересечения с отрезком $A'C'$. Отметим точки M' и N' , в которых MN пересекает AB и BC' соответственно. Из геометрических соображений ясно, что $|MM'| = |N'N| = x$ и $M'N' = a - 2x$. Таким образом, интенсивность луча, выходящего из среды, составляет



$$I(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(I_0 - \frac{\beta x}{a} \right) - \frac{\beta(a - 2x)}{a} \right) - \frac{\beta x}{a} = 0,25 \left(I_0 - 2\beta - \frac{\beta x}{a} \right).$$

Для дальнейшего анализа нам потребуются следующие соотношения:

$$I(0) = 0,25(I_0 - 2\beta), \quad (1)$$

$$I(a/2) = 0,25(I_0 - 2,5\beta), \quad (2)$$

$$I(x) = 0 \text{ при } x = \frac{I_0 - 2\beta}{\beta} \cdot a. \quad (3)$$

Заметим также, что $I(x)$ монотонно убывает с ростом $x < a/2$. Согласно (1), при $I_0 < 2\beta$ вся энергия падающего света будет поглощена. Из (2) следует, что при $I_0 > 2,5\beta$ луч выйдет при любом x . Если же $2\beta < I_0 < 2,5\beta$, то выйдут только лучи с координатами точки падения $x < \frac{I_0 - 2\beta}{\beta} \cdot a$.

Из соображений симметрии ясно, что лучи, падающие в точки с координатами $x > a/2$, рассматриваются аналогично.

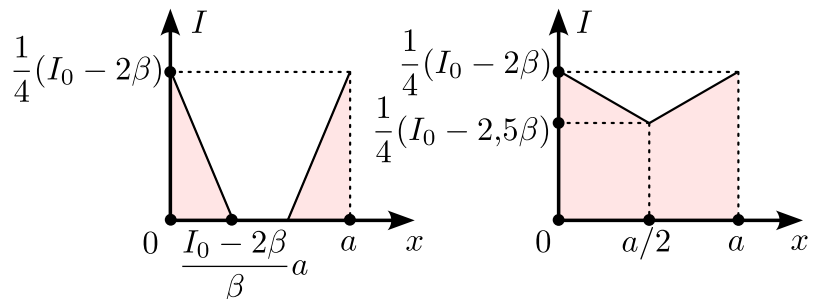
Площадь S под графиком $I(x)$ пропорциональна энергии, переносимой через AC в единицу времени лучами, покидающими систему. Следовательно,

$$\eta = \frac{S}{aI_0}.$$

Графики $I(x)$ при $2\beta < I_0 < 2,5\beta$ и $I_0 > 2,5\beta$ приведены на рисунке. Непосредственное вычисление приводит к ответу.

Ответ:

$$\eta = \begin{cases} 0, & I_0 < 2\beta; \\ \frac{(I_0 - 2\beta)^2}{4\beta I_0}, & 2\beta < I_0 < 2,5\beta; \\ \frac{1}{4} - \frac{9\beta}{16I_0}, & I_0 > 2,5\beta. \end{cases}$$



¹В действительности для большинства сред имеет место закон Бугера-Ламберта-Бера: за каждый метр пути интенсивность уменьшается в одно и то же количество раз. Если вы уже слышали о свойствах логарифмической функции, то без труда поймёте, как этот закон можно привести к виду $\ln(I) = \ln(I_0) - \beta l/a$.

Задача 5. Сверхпроводник

Авторское решение (Матвей Муравьев).

В обоих случаях после длительного ожидания в системе достигается равновесие и температуры тел перестают меняться. Запишем систему уравнений, описывающую тепловое равновесие в установке, если подключен только первый источник тока:

$$\begin{cases} I_0^2 \cdot R(T) = \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_{СП}), \\ \beta(T - T_{СП}) = \gamma(T_{СП} - T_0), \end{cases} \quad (4)$$

Здесь величины без индексов относятся к нагревателю, а с индексом СП — к сверхпроводнику.

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} T_{СП} = \frac{\beta T + \gamma T_0}{\beta + \gamma}, \\ R(T) = \frac{\alpha + \beta \parallel \gamma}{I_0^2} (T - T_0), \end{cases} \quad (5)$$

где для упрощения восприятия введено обозначение $\beta \parallel \gamma := \beta\gamma/(\beta + \gamma)$.

Таким образом для определения конечной температуры нагревателя достаточно найти пересечение зависимости $R(T)$, изображенной на графике, с прямой, задаваемой вторым уравнением системы (5).

Получаем $T = -257^\circ C \Rightarrow T_{СП} \approx -259,4^\circ C$.

При подключении второго источника постоянного тока к сверхпроводнику в левой части последнего уравнения системы (4) добавится слагаемое $I_0^2 \cdot R_{СП}(T_{СП})$, отвечающее за тепловыделение в сверхпроводнике.

В результате решение системы принимает вид:

$$\begin{cases} T_{СП} = \frac{\beta T + \gamma T_0}{\beta + \gamma} + \frac{I_0^2}{\beta + \gamma} R_{СП}(T_{СП}), \\ R(T) = \frac{\alpha + \beta \parallel \gamma}{I_0^2} (T - T_0) - \frac{\beta}{\beta + \gamma} R_{СП}(T_{СП}). \end{cases} \quad (6)$$

С учетом явного вида зависимости $R_{СП}(T_{СП})$, получаем:

$$R(T) = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta \parallel \gamma}{I_0^2} (T - T_0), & T < T_c + \frac{\gamma}{\beta} (T_c - T_0); \\ \frac{\alpha + \beta \parallel \gamma}{I_0^2} (T - T_0) - \frac{\beta}{\beta + \gamma} R_{СП}, & T > T_c + \frac{\gamma}{\beta} (T_c - T_0) - \frac{I_0^2}{\beta} R_{СП}. \end{cases} \quad (7)$$

Построим на графике оба решения $R(T)$ (красные наклонные), а также температурные границы их применимости (зеленый пунктир).

Верхняя наклонная пересекает зависимость $R(T)$ при температуре выше, чем граничные, значит сверхпроводник перешел в состояние с конечным сопротивлением $R_{СП} = 5$ кОм. Отсюда $T = -254^\circ C \Rightarrow T_{СП} \approx -255,8^\circ C$.

Ответ: $T_{СП1} \approx -259,4^\circ C$, $T_{СП2} \approx -255,8^\circ C$.

