

Районный тур 2025/26. 10 класс. I вариант

Задача 1.

Поместим начало координат в точку, в которой располагается верхний конец пружины, если она не деформирована, и направим ось X вниз. Найдём положение шарика x_1 до наливания воды из условия равновесия:

$$mg = kx_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{mg}{k}.$$

При наливании воды на шарик намерзает лёд. Определим его массу из уравнения теплового баланса:

$$cm(0^\circ\text{C} - T) = \lambda M \Leftrightarrow M = \frac{cm|T|}{\lambda}.$$

В воде на шарик и намерзший на него лёд действует сила Архимеда:

$$F_A = \rho_{\text{в}}g \left(V + \frac{M}{\rho_{\text{л}}} \right),$$

Рассмотрим новое положение равновесия системы:

$$kx_2 + F_A = (m + M)g \Leftrightarrow x_2 = \frac{g}{k} \left[m - \rho_{\text{в}}V + \frac{cm|T|}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \right) \right]. \quad (1)$$

Заметим, что $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{л}}$, поэтому третье слагаемое в квадратных скобках в (1) отрицательное. При определенном соотношении между параметрами задачи может оказаться, что $x_2 < 0$, то есть пружина растянута, а не сжата в конечном положении.

Найдём теперь перемещение шарика:

$$h = |x_2 - x_1| = \frac{g}{k} \left[\rho_{\text{в}}V + \frac{cm|T|}{\lambda} \left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} - 1 \right) \right]. \quad (2)$$

Ответ: перемещение шарика дается выражением (2).

Задача 2.

Обозначим расстояние между лампочкой и потолком через x . Плоское зеркало на потолке формирует мнимое изображение И лампочки Л, которое расположено за зеркалом и удалено от него на такое же расстояние x (см. Рис. 1). Области тени и полутени на полу не изменятся, если убрать зеркальный потолок, а вместо этого в точке, где находится изображение расположить еще одну такую же лампочку.

Проведем из лампочки и ее изображения в зеркале лучи, проходящие через край стола. Эти лучи определяют границы тени и полутени. Обозначим расстояние от лампочки Л до стола через y . Ясно, что $y = H - x - h$. Рассматривая подобие треугольников (см. Рис. 1), легко получить:

$$\frac{a}{y + 2x} = \frac{r}{y + 2x + h},$$

$$\frac{a}{y} = \frac{R}{y + h}.$$

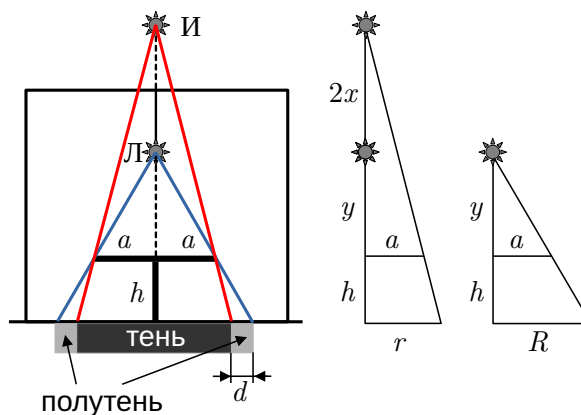


Рис. 1

С учетом того, что $R - r = d = a/2$ и $H = 3a$, имеем квадратное уравнение для определения x :

$$x^2 + 4ax - 4a^2 = 0.$$

Выбирая положительный корень, находим, что $x = 2a(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: лампочка располагается на расстоянии $2a(\sqrt{2} - 1)$ от потолка.

Задача 3.

Поскольку конструкцию запускают без вращения, в момент времени, предшествующий тому, когда нить лопнула, вертикальные проекции скоростей обоих шариков совпадают. Когда пружина распрямляется, она расталкивает шарики, изменяя их скорости. Легко понять, что в момент “срабатывания” пружина была ориентирована горизонтально. В противном случае вертикальные проекции скоростей перестали бы совпадать, и шарики не смогли бы упасть на пол одновременно. Иначе говоря, шарики все время находятся на одинаковой высоте над полом. Пружина изменяет только горизонтальные проекции скоростей. Найдем это изменение. Проще всего это сделать в системе центра масс шариков. В этой системе до распрямления пружины шарики покоились, а после распрямления они в силу закона сохранения импульса разлетаются в противоположные стороны с равными по величине скоростями. Найдем скорость разлета u из закона сохранения энергии:

$$2 \frac{mu^2}{2} = E \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{E}{m}}.$$

При движении в поле тяжести горизонтальные проекции скоростей не изменяются. Следовательно, после срабатывания пружины соответствующие компоненты скоростей первого и второго шариков в системе отсчета, связанной с комнатой, становятся равными $V_0 + u$ и $V_0 - u$ соответственно.

По условию, шарики упали на пол одновременно и рядом. При этом во время полета они могли соударяться со стенами, но не друг с другом, то есть горизонтальные координаты шариков совпадали вплоть до момента срабатывания пружины и вновь совпали только в момент падения на пол. Исследуем, как это могло произойти. Отметим, что за вертикальными перемещениями шариков следить необходимости нет, поскольку из соответствующего анализа можно найти только первоначальную высоту, с которой запускали конструкцию, что от нас не требуется. Поэтому будем обсуждать только горизонтальные перемещения шариков. Обозначим через x искомое расстояние от левой стены до места падения. Мыслимы три ситуации, которые схематично изображены на Рис. 2:

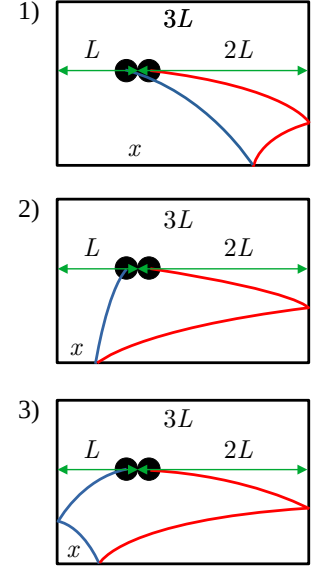


Рис. 2

1. Скорость $0 < u \leq V_0$: после распрямления пружины оба шарика продолжают двигаться в первоначальном направлении. Первый шарик ударяется о правую стену, после чего летит навстречу второму шарiku.
2. Скорость $u > V_0$: после распрямления пружины второй шарик начинает двигаться в обратном направлении с небольшой скоростью и падает на пол, не успев долететь до левой стены. Первый шарик ударяется о правую стену, после чего догоняет второй шарик.
3. Скорость $u > V_0$: после распрямления пружины второй шарик начинает двигаться в обратном направлении с достаточно большой скоростью. Шарики встречаются после того, как они оба ударятся о соответствующие стены.

Рассмотрим последовательно все случаи, начиная с первого. Приравняем время полета шариков от места, где распрямилась пружина, к месту падения (при этом учитываем, что при ударе о стену горизонтальная проекция скорости шарика меняется на противоположную, так как соударение происходит абсолютно упруго):

$$\frac{2L + (3L - x)}{V_0 + u} = \frac{x - L}{V_0 - u} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3L - 2L \frac{u}{V_0}. \quad (3)$$

Естественно, что условие $u \leq V_0$ равносильно тому, что $x \geq L$.

Второй случай, по сути, не отличается от первого: расстояние, преодолеваемое вторым шариком по горизонтали, теперь составляет $L - x$, а величина скорости равна $u - V_0$. Следовательно, мы получаем уравнение аналогичное (3), и искомое расстояние дается тем же выражением. Выпишем условие того, что первый шарик не ударяется о левую стену:

$$0 \leq x < L \quad \Leftrightarrow \quad V_0 < u \leq \frac{3}{2}V_0.$$

Рассмотрим, наконец, третий случай:

$$\frac{2L + (3L - x)}{V_0 + u} = \frac{L + x}{u - V_0} \Leftrightarrow x = 2L - 3L \frac{V_0}{u}.$$

Условие $x > 0$ естественно равносильно $u > 3V_0/2$. Случай $u = 3V_0/2$ соответствует ситуации, когда шарики попадают точно в левый угол комнаты, это “пограничная” ситуация между вторым и третьим сценариями.

Ответ: при $0 < u \leq 3V_0/2$ шарики падают на расстоянии $3L - 2Lu/V_0$ от левой стены, при $u > 3V_0/2$ шарики падают на расстоянии $2L - 3LV_0/u$ от левой стены, здесь $u = \sqrt{E/m}$.

Задача 4.

Обозначим силы реакции, действующие на стержни в точках А и С, соответственно $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_C$. На всю систему в целом, включающую стержни, шарнир В и груз с нитью, помимо сил $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_C$ действует только сила тяжести $m\vec{g}$ (см. Рис. 3). Поскольку силы уравновешены, имеем следующие соотношения для проекций сил:

$$R_{Ax} + R_{Cx} = 0, \quad (4)$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} = mg. \quad (5)$$

Далее удобно рассмотреть моменты сил, действующих на стержень ВС, относительно оси, проходящей через точку В. В этом случае плечо силы со стороны стержня АВ (шарнира В), равно нулю, так что можно сразу найти проекцию R_{Cy} :

$$mg \frac{L}{2} = R_{Cy} L \Leftrightarrow R_{Cy} = \frac{1}{2} mg. \quad (6)$$

Через L мы обозначили длину отрезка ВС. Из уравнения (5) находим, что вертикальная проекция силы реакции в точке А такая же: $R_{Ay} = mg/2$.

Нам осталось найти величину $R_{Cx} = -R_{Ax}$. Для этого можно, например, рассмотреть моменты сил, действующих на стержень АВ, относительно оси В. Мы сразу замечаем, что сила $\vec{R}_A$ должна создавать нулевой момент, т. е. быть направлена вдоль АВ. Отсюда имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = -\frac{mg}{2R_{Cx}} \Leftrightarrow R_{Cx} = -\frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (7)$$

Проекция R_{Cx} получилась отрицательной, поскольку сила $\vec{R}_C$ направлена “влево-вверх”. Модуль вектора $\vec{R}_C$ теперь легко найти из теоремы Пифагора:

$$R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2} = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = mg.$$

Задача решена. В качестве проверки ответа можно рассмотреть какое-нибудь условие равновесия, которое не участвовало в наших уравнениях. Поступим следующим образом. Рассмотрим точку пересечения D прямой АВ и вертикальной прямой, вдоль которой действует сила $m\vec{g}$ (см. Рис. 4). Сила тяжести и сила $\vec{R}_A$, действующие на всю систему из двух стержней, не создают моментов относительно оси D. Это означает, что и сила $\vec{R}_C$ должна иметь нулевой момент, т. е. быть направлена вдоль CD (это утверждение называется правилом трех сил). Из геометрии легко получить условие

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{R_{Cy}}{R_{Cx}},$$

которое согласуется с найденными выше выражениями (6) и (7).

Ответ: $R_C = mg$.

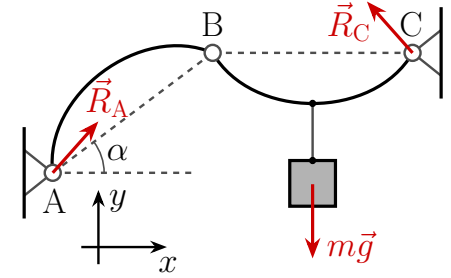


Рис. 3

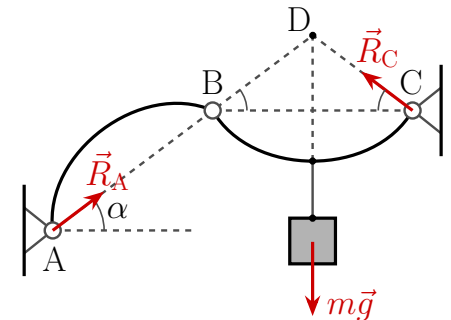


Рис. 4

Задача 5.

Исследуем, как сопротивление кольца R зависит от параметров задачи d , r_1 и r_2 . Пусть удельное сопротивление материала кольца ρ . По условию задачи боковая поверхность покрыта слоем материала с нулевым сопротивлением. Это означает, что напряжение между любыми двумя точками на внутренней (или на внешней) поверхности равно нулю, т. е. все точки эквивалентны. Таким образом, система обладает симметрией, ток течет строго вдоль радиальных направлений. Очевидно, что сопротивление R прямо пропорционально отношению ρ/d , которое имеет размерность омов. Это означает, что размерные величины r_1 и r_2 могут входить в ответ только в виде отношения r_2/r_1 , что позволяет записать:

$$R = \frac{\rho}{d} f\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (8)$$

Конечно, вместо $f(r_2/r_1)$ можно было бы написать $g(r_1/r_2)$, где $g(x)$ — другая безразмерная функция, связанная с $f(x)$ соотношением $g(x) = f(1/x)$. Для решения задачи не требуется определять явный вид функции $f(x)$. Соотношение (8) в первую очередь позволяет нам отмасштабировать имеющиеся в условии данные, чтобы рассматривать кольца только той толщины, которая указана в последней строке таблицы, т. е. $d = 0,5$ мм. При переходе к рассмотрению кольца в n раз меньшей толщины достаточно умножить сопротивление R на n . В итоге таблицу можно записать в следующем виде:

d , мм	r_1 , мм	r_2 , мм	R , Ом
0,5	1,0	10	80
0,5	5,0	15	38
0,5	2,0	60	?

Поскольку сопротивление зависит только от отношения r_2/r_1 , оба радиуса можно умножить на одно и то же число с сохранением значения R . Запишем таблицу в следующем виде:

d , мм	r_1 , мм	r_2 , мм	R , Ом
0,5	6,0	60	80
0,5	2,0	6,0	38
0,5	2,0	60	?

Здесь мы умножили радиусы в первой строке на 6, а во второй строке — на $2/5$. Теперь видно, что кольцо в третьей строке получается вложением второго кольца в первое. Так как при таком вложении все окружности остаются эквипотенциальными в силу симметрии (все точки окружности эквивалентны, а ток течет радиально), мы имеем *последовательное* соединение двух колец, что дает итоговое сопротивление $R_0 = 38 \text{ Ом} + 80 \text{ Ом} = 118 \text{ Ом}$.

Произведенные выше преобразования можно проиллюстрировать с помощью Рис. 5.

Задачу можно было решить и более алгебраическим способом. Запишем формулу (8) для каждого из колец в условии задачи:

$$\begin{aligned} 20 \text{ Ом} &= \frac{\rho}{2 \text{ мм}} f(10), \\ 19 \text{ Ом} &= \frac{\rho}{1 \text{ мм}} f(3), \\ R_0 &= \frac{\rho}{0,5 \text{ мм}} f(30). \end{aligned}$$

Для удобства обозначим безразмерную величину $(1 \text{ Ом}) \cdot (1 \text{ мм})/\rho$ за α . Тогда можно записать

$$f(10) = 40\alpha, \quad (9)$$

$$f(3) = 19\alpha, \quad (10)$$

$$R_0 = \frac{2f(30)}{\alpha} \text{ Ом}. \quad (11)$$

Наша задача — определить значение $f(30)$, зная $f(3)$ и $f(10)$. Представим произвольное кольцо с радиусами r_1 и r_2 в виде последовательного подключения вложенных колец с радиусами r_1 , r_3 и r_3 , r_2 ($r_1 < r_3 < r_2$). При последовательном подключении сопротивления складываются, что позволяет записать

$$f\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = f\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + f\left(\frac{r_2}{r_3}\right).$$

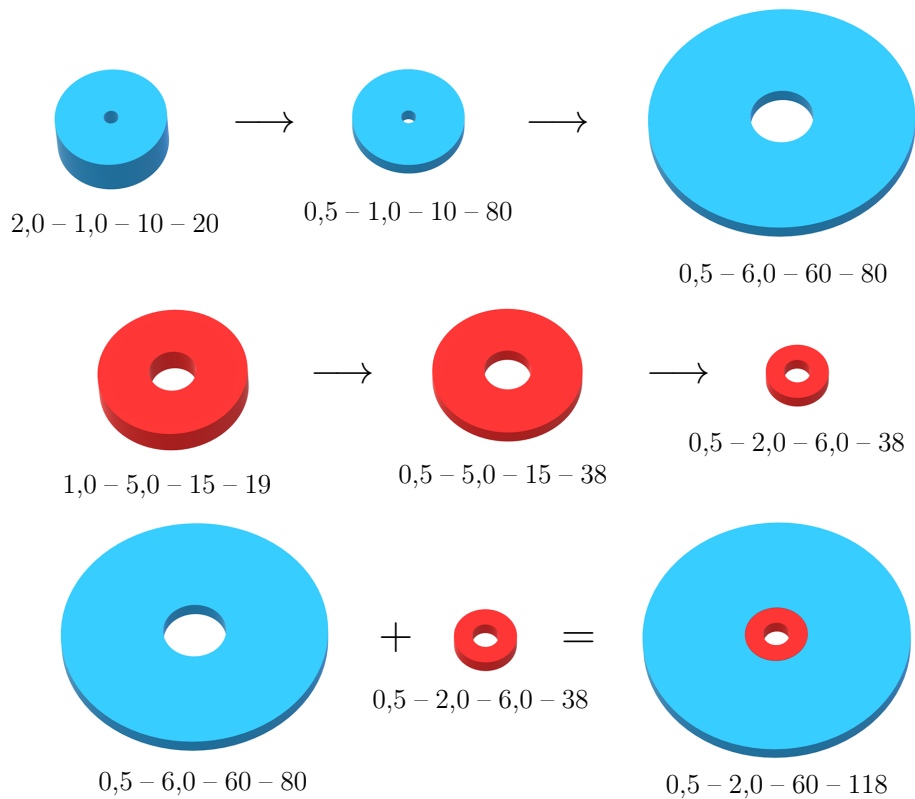


Рис. 5

Преобразуем аргумент функции f в левой части уравнения:

$$f\left(\frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3}\right) = f\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + f\left(\frac{r_2}{r_3}\right),$$

где параметры r_3/r_1 и r_2/r_3 являются независимыми. Более простая запись этого тождества имеет вид

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Теперь ясно, что искомое значение равно

$$f(30) = f(3) + f(10) = 19\alpha + 40\alpha = 59\alpha.$$

Здесь мы использовали (9) и (10). Подставляя это в формулу (11), находим

$$R_0 = \frac{2 \cdot 59\alpha}{\alpha} \text{ Ом} = 118 \text{ Ом}.$$

Замечание: с использованием закона Ома в дифференциальной форме можно показать, что на самом деле $f(x) = (1/2\pi) \ln x$, и из данных задачи определить удельное сопротивление ρ (это находится за рамками школьной программы и не требуется для решения задачи).

Ответ: 118 Ом.

Районный тур 2025/26. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Обозначим искомую жесткость пружины через k .

Поместим начало координат в точку, в которой располагается верхний конец пружины, если она не деформирована, и направим ось X вниз. Найдем положение шарика x_1 до наливания воды из условия равновесия:

$$mg = kx_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{mg}{k}.$$

При наливании воды на шарик намерзает лед. Определим его массу из уравнения теплового баланса:

$$cm(0^\circ\text{C} - T) = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{cm|T|}{\lambda}.$$

В воде на шарик и намерзший на него лед действует сила Архимеда:

$$F_A = \rho_v g \left(V + \frac{M}{\rho_l} \right),$$

Рассмотрим новое положение равновесия системы:

$$kx_2 + F_A = (m + M)g \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{g}{k} \left[m - \rho_v V + \frac{cm|T|}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \right]. \quad (12)$$

Заметим, что $\rho_v > \rho_l$, поэтому треть слагаемое в квадратных скобках в (12) отрицательное. При определенном соотношении между параметрами задачи может оказаться, что $x_2 < 0$, то есть пружина растянута, а не сжата в конечном положении.

Найдем теперь жесткость пружины:

$$h = |x_2 - x_1| \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{g}{h} \left[\rho_v V + \frac{cm|T|}{\lambda} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} - 1 \right) \right]. \quad (13)$$

Ответ: жесткость пружины дается выражением (13).

Задача 2.

Обозначим расстояние между лампочкой и потолком через x . Плоское зеркало на потолке формирует мнимое изображение И лампочки Л, которое расположено за зеркалом и удалено от него на такое же расстояние x (см. Рис. 6). Области тени и полутени на полу не изменятся, если убрать зеркальный потолок, а вместо этого в точке, где находится изображение расположить еще одну такую же лампочку.

Проведем из лампочки и ее изображения в зеркале лучи, проходящие через край стола. Эти лучи определяют границы тени и полутени. Обозначим расстояние от лампочки Л до стола через y . Ясно, что $y = H - x - h$. Рассматривая подобие треугольников (см. Рис. 6), легко получить:

$$\frac{a}{y + 2x} = \frac{r}{y + 2x + h},$$

$$\frac{a}{y} = \frac{R}{y + h}.$$

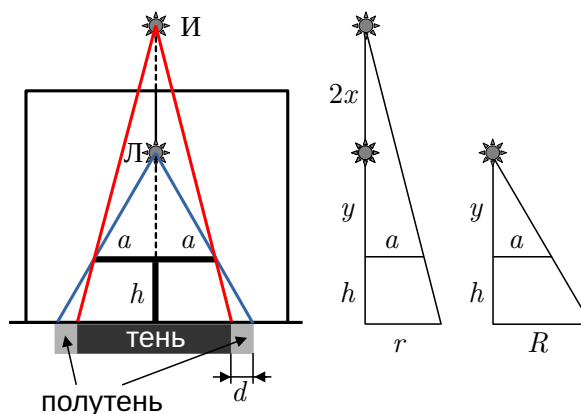


Рис. 6

С учетом того, что $R - r = d = a/3$ и $H = 4a$, имеем квадратное уравнение для определения x :

$$x^2 + 6ax - 9a^2 = 0.$$

Выбирая положительный корень, находим, что $x = 3a(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: лампочка располагается на расстоянии $3a(\sqrt{2} - 1)$ от потолка.

Задача 3.

Поскольку конструкцию запускают без вращения, в момент времени, предшествующий тому, когда нить лопнула, вертикальные проекции скоростей обоих шариков совпадают. Когда пружина распрямляется, она расталкивает шарики, изменяя их скорости. Легко понять, что в момент “срабатывания” пружина была ориентирована горизонтально. В противном случае вертикальные проекции скоростей перестали бы совпадать, и шарики не смогли бы упасть на пол одновременно. Иначе говоря, шарики все время находятся на одинаковой высоте над полом. Пружина изменяет только горизонтальные проекции скоростей. Найдем это изменение. Проще всего это сделать в системе центра масс шариков. В этой системе до распрямления пружины шарики покоились, а после распрямления они в силу закона сохранения импульса разлетаются в противоположные стороны с равными по величине скоростями. Найдем скорость разлета u из закона сохранения энергии:

$$2 \frac{mu^2}{2} = E \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{E}{m}}.$$

При движении в поле тяжести горизонтальные проекции скоростей не изменяются. Следовательно, после срабатывания пружины соответствующие компоненты скоростей первого и второго шариков в системе отсчета, связанной с комнатой, становятся равными $V_0 + u$ и $V_0 - u$ соответственно.

По условию, шарики упали на пол одновременно и рядом. При этом во время полета они могли соударяться со стенами, но не друг с другом, то есть горизонтальные координаты шариков совпадали вплоть до момента срабатывания пружины и вновь совпали только в момент падения на пол. Исследуем, как это могло произойти. Отметим, что за вертикальными перемещениями шариков следить необходимости нет, поскольку из соответствующего анализа можно найти только первоначальную высоту, с которой запускали конструкцию, что от нас не требуется. Поэтому будем обсуждать только горизонтальные перемещения шариков. Обозначим через x искомое расстояние от левой стены до места падения. Мыслимы три ситуации, которые схематично изображены на Рис. 7:

1. Скорость $0 < u \leq V_0$: после распрямления пружины оба шарика продолжают двигаться в первоначальном направлении. Первый шарик ударяется о правую стену, после чего летит навстречу второму шарiku.
2. Скорость $u > V_0$: после распрямления пружины второй шарик начинает двигаться в обратном направлении с небольшой скоростью и падает на пол, не успев долететь до левой стены. Первый шарик ударяется о правую стену, после чего догоняет второй шарик.
3. Скорость $u > V_0$: после распрямления пружины второй шарик начинает двигаться в обратном направлении с достаточно большой скоростью. Шарик встречается после того, как они оба ударятся о соответствующие стены.

Рассмотрим последовательно все случаи, начиная с первого. Приравняем время полета шариков от места, где распрямилась пружина, к месту падения (при этом учитываем, что при ударе о стену горизонтальная проекция скорости шарика меняется на противоположную, так как соударение происходит абсолютно упруго):

$$\frac{L + (3L - x)}{V_0 + u} = \frac{x - 2L}{V_0 - u} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3L - L \frac{u}{V_0}. \quad (14)$$

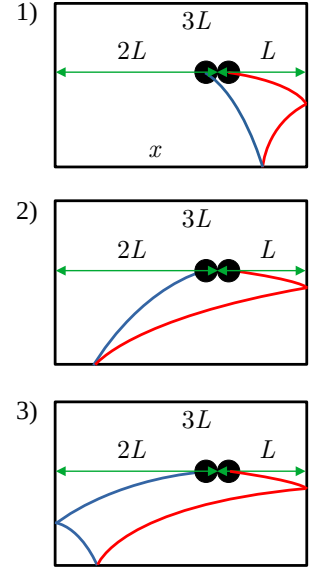


Рис. 7

Естественно, что условие $u \leq V_0$ равносильно тому, что $x \geq 2L$.

Второй случай, по сути, не отличается от первого: расстояние, преодолеваемое вторым шариком по горизонтали, теперь составляет $2L - x$, а величина скорости равна $u - V_0$. Следовательно, мы получаем уравнение аналогичное (14), и искомое расстояние дается тем же выражением. Выпишем условие того, что первый шарик не ударяется о левую стену:

$$0 \leq x < 2L \quad \Leftrightarrow \quad V_0 < u \leq 3V_0.$$

Рассмотрим, наконец, третий случай:

$$\frac{L + (3L - x)}{V_0 + u} = \frac{2L + x}{u - V_0} \quad \Leftrightarrow \quad x = L - 3L \frac{V_0}{u}.$$

Условие $x > 0$ естественно равносильно $u > 3V_0$. Случай $u = 3V_0$ соответствует ситуации, когда шарики падают точно в левый угол комнаты, это “пограничная” ситуация между вторым и третьим сценариями.

Ответ: при $0 < u \leq 3V_0$ шарики падают на расстоянии $3L - Lu/V_0$ от левой стены, при $u > 3V_0$ шарики падают на расстоянии $L - 3LV_0/u$ от левой стены, здесь $u = \sqrt{E/m}$.

Задача 4.

Обозначим силы реакции, действующие на стержни в точках А и С, соответственно $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_C$. На всю систему в целом, включающую стержни, шарнир В и груз с нитью, помимо сил $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_C$ действует только сила тяжести $m\vec{g}$ (см. Рис. 8). Поскольку силы уравновешены, имеем следующие соотношения для проекций сил:

$$R_{Ax} + R_{Cx} = 0, \quad (15)$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} = mg. \quad (16)$$

Далее удобно рассмотреть моменты сил, действующих на стержень ВС, относительно оси, проходящей через точку В. В этом случае плечо силы со стороны стержня АВ (шарнира В), равно нулю, так что можно сразу найти проекцию R_{Cy} :

$$mg \frac{L}{2} = R_{Cy}L \quad \Leftrightarrow \quad R_{Cy} = \frac{1}{2} mg. \quad (17)$$

Через L мы обозначили длину отрезка ВС. Из уравнения (16) находим, что вертикальная проекция силы реакции в точке А такая же: $R_{Ay} = mg/2$.

Нам осталось найти величину $R_{Ax} = -R_{Cx}$. Для этого можно, например, рассмотреть моменты сил, действующих на стержень АВ, относительно оси В. Мы сразу замечаем, что сила $\vec{R}_A$ должна создавать нулевой момент, т. е. быть направлена вдоль АВ. Отсюда имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = \frac{mg}{2R_{Ax}} \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ax} = \frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (18)$$

Модуль вектора $\vec{R}_A$ теперь легко найти из теоремы Пифагора:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

Задача решена. В качестве проверки ответа можно рассмотреть какое-нибудь условие равновесия, которое не участвовало в наших уравнениях. Поступим следующим образом. Рассмотрим точку пересечения D прямой АВ и вертикальной прямой, вдоль которой действует сила $m\vec{g}$ (см. Рис. 9). Сила тяжести и сила $\vec{R}_A$, действующие на всю систему из двух стержней, не создают моментов относительно

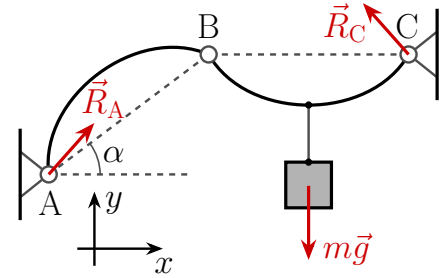


Рис. 8

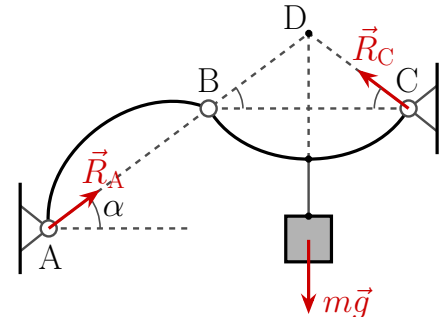


Рис. 9

оси D. Это означает, что и сила $\vec{R}_C$ должна иметь нулевой момент, т. е. быть направлена вдоль CD (это утверждение называется правилом трех сил). Из геометрии легко получить условие

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{R_{Cy}}{R_{Cx}} = \frac{R_{Cy}}{R_{Ax}},$$

которое согласуется с найденными выше выражениями (17) и (18).

Ответ: $R_C = mg/\sqrt{3}$.

Задача 5.

Исследуем, как сопротивление кольца R зависит от параметров задачи d , r_1 и r_2 . Пусть удельное сопротивление материала кольца ρ . По условию задачи боковая поверхность покрыта слоем материала с нулевым сопротивлением. Это означает, что напряжение между любыми двумя точками на внутренней (или на внешней) поверхности равно нулю, т. е. все точки эквивалентны. Таким образом, система обладает симметрией, ток течет строго вдоль радиальных направлений. Очевидно, что сопротивление R прямо пропорционально отношению ρ/d , которое имеет размерность омов. Это означает, что размерные величины r_1 и r_2 могут входить в ответ только в виде отношения r_2/r_1 , что позволяет записать:

$$R = \frac{\rho}{d} f\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (19)$$

Конечно, вместо $f(r_2/r_1)$ можно было бы написать $g(r_1/r_2)$, где $g(x)$ — другая безразмерная функция, связанная с $f(x)$ соотношением $g(x) = f(1/x)$. Для решения задачи не требуется определять явный вид функции $f(x)$. Соотношение (19) в первую очередь позволяет нам отмасштабировать имеющиеся в условии данные, чтобы рассматривать кольца только той толщины, которая указана в последней строке таблицы, т. е. $d = 2$ мм. При переходе к рассмотрению кольца в n раз меньшей толщины достаточно умножить сопротивление R на n . В итоге таблицу можно записать в следующем виде:

d , мм	r_1 , мм	r_2 , мм	R , Ом
2,0	3,0	15	14
2,0	5,0	10	6
2,0	6,0	60	?

Поскольку сопротивление зависит только от отношения r_2/r_1 , оба радиуса можно умножить на одно и то же число с сохранением значения R . Запишем таблицу в следующем виде:

d , мм	r_1 , мм	r_2 , мм	R , Ом
2,0	6,0	30	14
2,0	30	60	6
2,0	6,0	60	?

Здесь мы умножили радиусы в первой строке на 2, а во второй строке — на 6. Теперь видно, что кольцо в третьей строке получается вложением первого кольца во второе. Так как при таком вложении все окружности остаются эквипотенциальными в силу симметрии (все точки окружности эквивалентны, а ток течет радиально), мы имеем *последовательное* соединение двух колец, что дает итоговое сопротивление $R_0 = 14 \text{ Ом} + 6 \text{ Ом} = 20 \text{ Ом}$.

Произведенные выше преобразования можно проиллюстрировать с помощью Рис. 10.

Задачу можно было решить и более алгебраическим способом. Запишем формулу (19) для каждого из колец в условии задачи:

$$\begin{aligned} 28 \text{ Ом} &= \frac{\rho}{1 \text{ мм}} f(5), \\ 24 \text{ Ом} &= \frac{\rho}{0,5 \text{ мм}} f(2), \\ R_0 &= \frac{\rho}{2 \text{ мм}} f(10). \end{aligned}$$

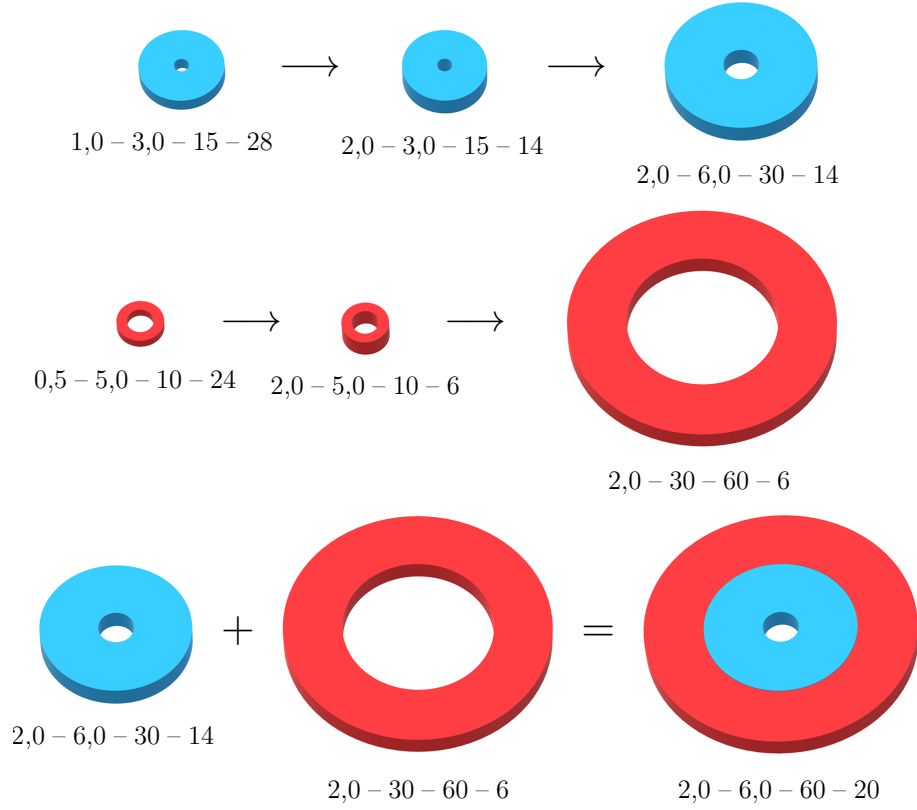


Рис. 10

Для удобства обозначим безразмерную величину $(1 \text{ Ом}) \cdot (1 \text{ мм})/\rho$ за α . Тогда можно записать

$$f(5) = 28\alpha, \quad (20)$$

$$f(2) = 12\alpha, \quad (21)$$

$$R_0 = \frac{f(10)}{2\alpha} \text{ Ом}. \quad (22)$$

Наша задача — определить значение $f(10)$, зная $f(2)$ и $f(5)$. Представим произвольное кольцо с радиусами r_1 и r_2 в виде последовательного подключения вложенных колец с радиусами r_1, r_3 и r_3, r_2 ($r_1 < r_3 < r_2$). При последовательном подключении сопротивления складываются, что позволяет записать

$$f\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = f\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + f\left(\frac{r_2}{r_3}\right).$$

Преобразуем аргумент функции f в левой части уравнения:

$$f\left(\frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3}\right) = f\left(\frac{r_3}{r_1}\right) + f\left(\frac{r_2}{r_3}\right),$$

где параметры r_3/r_1 и r_2/r_3 являются независимыми. Более простая запись этого тождества имеет вид

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Теперь ясно, что искомое значение равно

$$f(10) = f(2) + f(5) = 12\alpha + 28\alpha = 40\alpha.$$

Здесь мы использовали (20) и (21). Подставляя это в формулу (22), находим

$$R_0 = \frac{40\alpha}{2\alpha} \text{ Ом} = 20 \text{ Ом}.$$

Замечание: с использованием закона Ома в дифференциальной форме можно показать, что на самом деле $f(x) = (1/2\pi) \ln x$, и из данных задачи определить удельное сопротивление ρ (это находится за рамками школьной программы и не требуется для решения задачи).

Ответ: 20 Ом.