

Задача 10.1. Спиральная пружина

1. Определите длину пружины.
2. Дайте объяснение, почему пружина раскрывается.
3. Исследуйте зависимость потенциальной энергии лежащей на столе спиральной пружины от высоты подъема ее верхнего края над столом.
4. Определите величины потенциальной энергии лежащей на столе спиральной пружины при ее полном раскрытии и в состоянии неустойчивого равновесия. За нулевое значение энергии примите состояние, когда пружина лежит на столе плоско.

Оборудование: пружина, весы, дощечка, нитка, скотч, брусок, бумага, миллиметровка.

Решение

Масса пружины $m_0 = 59.55$ г.

Количество витков пружины, плоско лежащей на столе, $N_0 = 14$, диаметр одного витка $D_0 = 12.5$ см.

Пружина стремится распрямиться. При раскрытии и подъеме пружины один оборот распределяется при повороте витков на различные углы вокруг оси, количество витков становится равным 13, а диаметр одного витка $D_1 = 13.5$ см.



$$l_0 = \pi N_0 D_0, \quad l_1 = \pi N_1 D_1, \quad l_0 = l_1,$$

$$l_0 = \pi \cdot 14 \cdot 12.5 = 175\pi = 549 \text{ см}, \quad l_1 = \pi \cdot 13 \cdot 13.5 = 175.5\pi = 551.3 \text{ см}$$

Учитывая, что длина ленты пружины при ее раскрытии не меняется, а также, что при проектировке используются обычно стандартные типоразмеры, можно считать, что $l = l_0 = l_1 = 550$ см.

Неустойчивое равновесие, ниже которого пружина схлопывается, а выше – поднимается, достигается при высоте верхнего края пружины $H = 6$ см, диаметр $D = 13$ см. В полностью раскрытом положении $H_1 = D_1 = 13.5$ см.

Потенциальная энергия:

$$E_p = \sum_i F_i \Delta l_i \quad (1)$$

$$F_i = (m_i - m_0) g, \quad (2)$$

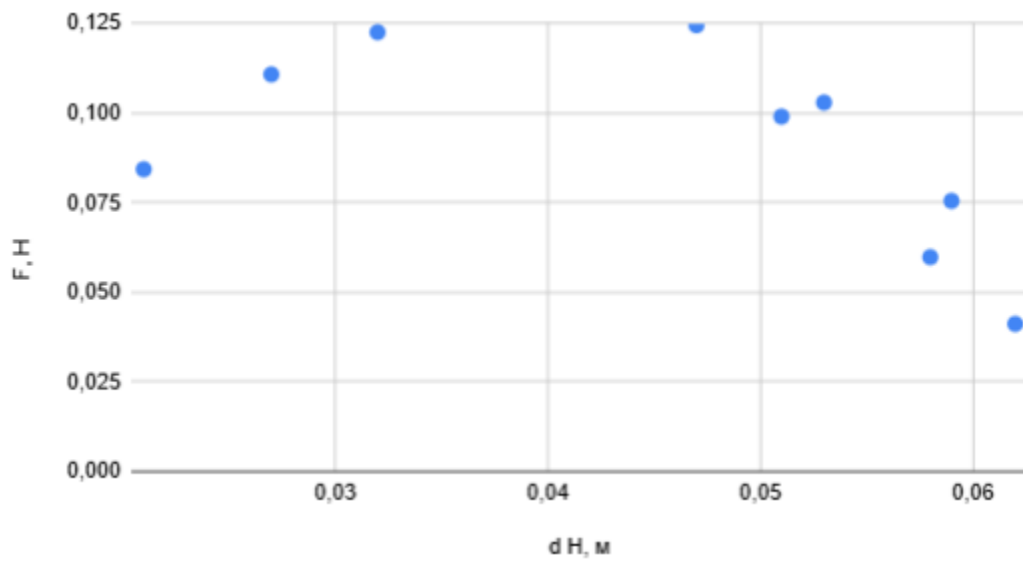
где m_i – показания весов.

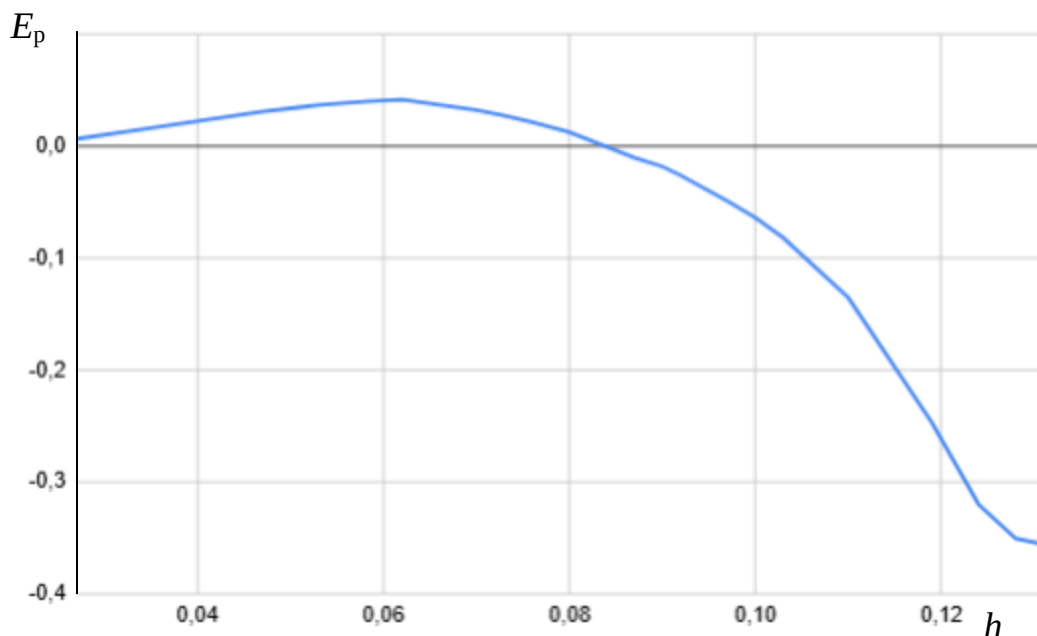
$$E_p = \sum_i (m_i - m_0) g \Delta l_i \quad (3)$$

		h_0 , см	m , г
		2,1	60
h , см	m , г	$d H$, м	F , Н
15,2	18,8	0,131	0,184428
14,9	79,2	0,128	0,776952
14,5	151	0,124	1,48131
14	129	0,119	1,26549
13,1	79,8	0,11	0,782838
12,4	61,3	0,103	0,601353
12,1	52	0,1	0,51012
11,8	47,3	0,097	0,464013
11,3	42,1	0,092	0,413001
11,1	27,5	0,09	0,269775
10,8	33,7	0,087	0,330597
10,1	23	0,08	0,22563

9,7	21,3	0,076	0,208953
9,4	16,3	0,073	0,159903
9,1	12,3	0,07	0,120663

h , см	m , г	$d H$, м	F , Н
4,2	8,6	0,021	0,084366
4,8	11,3	0,027	0,110853
6,8	12,7	0,047	0,124587
7,2	10,1	0,051	0,099081
7,9	6,1	0,058	0,059841
8,3	4,2	0,062	0,041202
7,4	10,5	0,053	0,103005
8	7,7	0,059	0,075537
5,3	12,5	0,032	0,122625





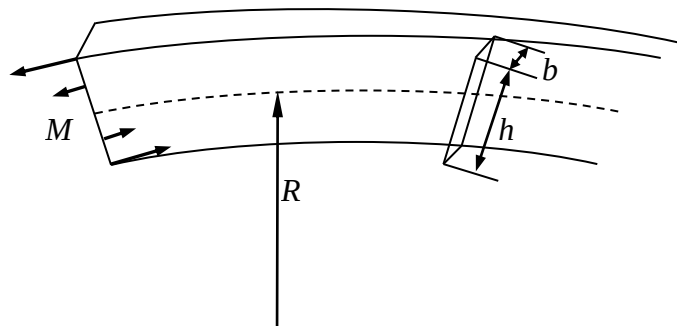
$$E_{p \max} = 0.032 \text{ Дж}, \quad E_{p \min} = -0.356 \text{ Дж}$$

Комментарий к решению – аналитическое решение задачи

Известно, что момент силы в сечении относительно средней линии изогнутой прямоугольной балки может быть рассчитан по формуле

$$M_z = \frac{EJ_z}{R}, \quad \text{где} \quad J_z = \frac{bh^3}{12},$$

– геометрический момент инерции сечения балки, b – ширина балки, h – ее толщина, R – радиус кривизны балки, E – модуль Юнга. В нашем случае b – ширина ленты, из которой изготовлено кольцо пружины, h – ее толщина.



$$M_z = E \frac{bh^3}{12} \frac{1}{R}, \quad dA = M_z d\varphi.$$

Пусть число витков N , длина пружины не меняется, но меняется радиус. Тогда

$$l = 2\pi N_0 R_0 = 2\pi N R \Rightarrow R_0 \varphi_0 = R \varphi \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\varphi}{R_0 \varphi_0}$$

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Ebh^3}{12} \frac{\varphi}{R_0\varphi_0} d\varphi = \frac{Ebh^3}{12R_0\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi$$

Интеграл аналогичен получающемуся при вычислении пути при равноускоренном движении.

$$A = \frac{Ebh^3}{24R_0\varphi_0} (\varphi^2 - \varphi_0^2), \quad A = \frac{Ebh^3 R_0\varphi_0}{24} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right).$$

Потенциальная энергия

$$E_p = \frac{Ebh^3 R_0\varphi_0}{24} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) + mgH_c = \frac{Ebh^3 l}{24} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) + mg \frac{H}{2}.$$

$$E_p = \frac{Ebh^3 l}{6} \left(\frac{1}{D^2} - \frac{1}{D_0^2} \right) + mg \frac{H}{2}$$

С учетом модуля Юнга для стали и измеренных геометрических размеров пружины: $E_{p \min} = -0.46$ Дж, что отличается на 29 % от определения потенциальной энергии на основе суммирования работы.

Критерии оценивания 10.1.

1. Определена длина пружины, $l = 550 \pm 1$ см	1
2. Указано, что силу порождает изменение радиуса (диаметра колец)	2
3. Описан метод измерения силы упругости (с помощью нити)	1
4. Сняты зависимости показаний весов от высоты пружины, результаты сведены в таблицу (2 с нитью+2 без нити)	4
5. Получены формулы (1), (2), (3) (по 1 баллу за каждую)	3
6. Построена зависимость потенциальной энергии от высоты	3
7. Определены значения потенциальной энергии лежащей на столе спиральной пружины при ее полном раскрытии и в состоянии неустойчивого равновесия. Результаты попали в диапазон ± 20 %	2

Задача 10.2. Цилиндрический конденсатор

Определите диэлектрическую проницаемость жидкости, налитой в цилиндрический конденсатор.

Известно, что электрическая емкость цилиндрического конденсатора длиной l , внешним радиусом внутренней обкладки R_1 и внутренним радиусом внешней обкладки R_2 имеет вид:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Оборудование: два алюминиевых цилиндра, заглушки, силиконовая замазка по требованию, мультиметр, батарея, секундомер, постоянный конденсатор, штангенциркуль по требованию, миллиметровка. **Будьте предельно аккуратны с силиконовой замазкой, она не смывается водой!**

Решение

У цилиндрического конденсатора с водой между обкладками есть важная особенность: при подаче напряжения внутри начинается движение ионов, которые затем взаимодействуют с обкладками конденсатора, и в результате весь цилиндр начинает выступать как аккумулятор.

Этим вкладом пренебрегать нельзя, однако точно описать его также непросто, в этой работе это не требуется. Если долго “заряжать” конденсатор, можно добиться того, что появится постоянное напряжение, которое не будет уходить даже если “закоротить” (соединить обкладки для разрядки) конденсатор – оно может временно упасть, но затем снова вырасти до прежних значений (по всей видимости, из-за солей на обкладках).

Чтобы избегать подобных помех, есть несколько способов бороться с подобным напряжением: например, можно после каждого измерения “закорачивать” конденсатор на длительное время (несколько минут), либо постоянно менять полярность зарядки – так, чтобы напряжение от ионных эффектов колебалось около нуля.

Рекомендации по работе с самодельным конденсатором:

- Герметизировать конденсатор снизу с помощью замазки
- Закрепить на штативе, чтобы избежать проливания воды
- **Важно:** зачистить места контактов, иначе из-за оксидной пленки не будет контакта

Диэлектрическая проницаемость ε должна рассчитываться по формуле:

$$\varepsilon = \frac{C \ln(R_1/R_2)}{2\pi\varepsilon_0 l} \quad (1)$$

Для исследуемых конденсаторов:

$$R_1 = 4 \text{ мм}, R_2 = 6.5 \text{ мм}, l = 30 \text{ см}$$

Для того, чтобы определить диэлектрическую проницаемость ε , требуется измерить ёмкость конденсатора. Для этого есть несколько хороших способов, позволяющие бороться с эффектами от ионного обмена.

Метод 1: использовать второй конденсатор с известной ёмкости для исследования перетекающего заряда.

Для этого нужно

- Подключить исследуемый конденсатор к источнику
- Подождать несколько секунд для зарядки конденсатора
- Быстро подключить его к мультиметру в режиме измерения напряжения для определения изначального напряжения U_0 .
- Убедиться в том, что тестовый постоянный конденсатор не заряжен (“закоротить”, затем лучше проверить, что напряжение нулевое)
- Подсоединить на очень короткое время конденсаторы друг к другу, *соблюдая полярность*
- (“минусики” у постоянного конденсатора должны идти к меньшему потенциалу)
- Измерить напряжение U_1 на *постоянном конденсаторе* (с ёмкостью $C_0 = 10 \text{ мкФ}$) после соединения.

Напряжение исследуемого конденсатора измерять *малоосмысленно*, так как оно может измениться после равновесия из-за ионных потоков. Более

того, можно убедиться, что напряжения на исследуемом и постоянном конденсаторе после контакта *будут сильно отличаться*.

При начальном напряжении U_0 заряд на исследуемом $q = U_0 C$, начальный заряд на тестовом — нулевой, после присоединения общий заряд сохраняется, $q = U_0 C = U_1 C + U_1 C_0$. Отсюда получаем

$$C(U_0 - U_1) = U_1 C_0$$
$$C = \frac{C_0}{U_0/U_1 - 1} \quad (2)$$

Метод 2: исследование разрядки конденсатора.

Конденсатор при замыкании разряжается по закону $U(t) = U_0 \exp(-t / \tau)$, где $\tau = RC$. Однако здесь более правильно использовать формулу

$$U(t) = U_0 \exp(-t / \tau) + U_{\text{ионное}}, \quad (3)$$

где последнее слагаемое отвечает за малый слабо затухающий вклад от ионного обмена. На самом деле это тоже не очень точное описание, так как ионный вклад меняется со временем, и исследовать затухание лучше не на очень больших напряжениях и временах.

Проще всего замыкать его через вольтметр, который обычно имеет сопротивление, близкое к 1 МОм. Это значение можно получить, зарядив и разрядив (соблюдая полярность) тестовый конденсатор (напряжение падает в 10 раз за 23 секунды, соответствует $\tau = 10$ с, $R = 1$ МОм).

Для измерения нужно:

- Подключить конденсатор к батарее с резистором на ~ 10 секунд. Напрямую к батарее подключать не рекомендуется, так как так легко просадить батарею и получить большое ионное напряжение.
- Подсоединить конденсатор к вольтметру, замерить с помощью секундомера $U(t)$.
- Определить напряжение на большом времени $U_{\text{ионное}}$

- Построить на миллиметровке график $\ln(U(t) - U_{\text{ионное}})$ и определить коэффициент наклона, который должен быть равен $k = 1/\tau$.
- Рассчитать $C = \tau/R$.

Можно измерять ёмкость и другими методами, но они крайне плохо взаимодействуют с ионными эффектами в конденсаторе. Например, примером плохой идеи будет подключить конденсаторы последовательно к источнику и смотреть, как на них будет распределяться напряжение – в этом случае длительное нахождение под напряжением приведет к сильным ионным эффектам.

При обоих способах измерения могут получаться значения C в диапазоне от 10 до 25 мкФ, что при подстановке в формулу (1) соответствуют ε от $3 \cdot 10^5$ до $7 \cdot 10^5$.

Критерии оценивания 10.2

1. Получена формула (1)	1
2. Правильно измерены R_1, R_2, l	1
3. Верно описана установка и методика измерений	2
Метод 1.	3
4.1. Проведены измерения: ≥ 5 измерений	3
≥ 4 измерений	2
≥ 3 измерений	1
5.1. Получена формула (2)	2
6.1. Не указано, что напряжение снимается на тестовом конденсаторе	-1
Метод 2.	
4.2. Проведены измерения требуемых величин 1 график ≥ 7 точек	3
≥ 5 точек	2
≥ 3 точек	1
≥ 2 графика ≥ 5 точек	3
≥ 4 точек	2
≥ 3 точек	1
5.2. Получена формула (3) или ее аналог	1

6.2. Корректно построен график	1
7.2. Не учитывается $U_{\text{ионное}}$	-1
7. Упоминаются особенности конденсатора, связанные с ионным обменом и способы борьбы с ними	2
8. Получена диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = (4.5 \pm 1.5) \cdot 10^5$ $\varepsilon = (4.5 \pm 3) \cdot 10^5$	2
	1
9. Правильно оценена погрешность С небольшими недочетами	2
	1