

Городской тур 2025/26. 10 класс

Задача 1.

По условию задачи космический корабль может иметь только нормальную компоненту ускорения $\vec{a}_n(t)$, направленную в каждый момент перпендикулярно вектору мгновенной скорости и зависящую от времени. Это означает, что модуль скорости корабля всегда равен v и на каждом малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ траектория движения корабля близка к дуге окружности радиуса $R(t) = v^2/a_n(t)$. Поскольку по условию задачи нормальное ускорение ограничено сверху величиной a , радиус кривизны ограничен снизу:

$$R(t) \geq v^2/a = d. \quad (1)$$

При максимальной тяге корабль движется по окружности радиуса d , а при отключении двигателей — выходит на прямую (предел дуги окружности очень большого радиуса). В задаче требуется минимизировать время движения корабля между заданными точками. Так как скорость корабля неизменна по величине, это эквивалентно поиску траектории минимальной длины с учётом ограничения на радиус кривизны (1). Таким образом, мы формализовали задачу в исключительно геометрических терминах.

Проще всего разобраться со вторым вопросом задачи, т. е. найти оптимальную траекторию между точками О и В. Очевидно, эта траектория является полуокружностью, изображённой на Рис. 1 красным цветом. Длина этой полуокружности равна πd , а искомое время

$$T_{ОВ} = \frac{\pi d}{v} = \frac{\pi v}{a}. \quad (2)$$

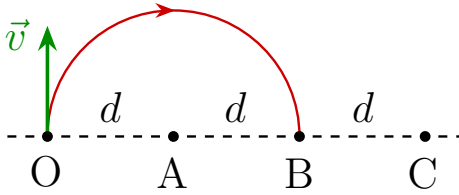


Рис. 1:

Для ответа на третий вопрос задачи требуется найти оптимальную кривую между точками О и С. На начальном этапе движения кораблю не имеет смысла отклоняться от предельной окружности, показанной на Рис. 1, однако в некоторый момент он сможет выйти на отрезок прямой в направлении точки С. Нам достаточно провести касательную к окружности из точки С (см. Рис. 2). Обозначим точку касания буквой D. В прямоугольном треугольнике ADC найдём острый угол CAD:

$$\cos \angle CAD = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2} \implies \angle CAD = \frac{\pi}{3}.$$

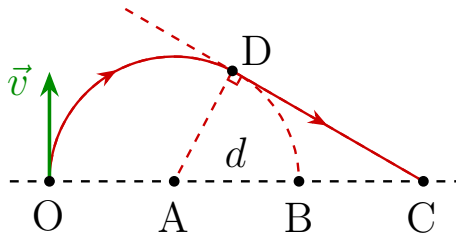


Рис. 2:

Путь корабля складывается из длины дуги OD с градусной мерой $2\pi/3$ и длины отрезка CD, которая равна $d\sqrt{3}$. Тогда для времени движения имеем

$$T_{OC} = \frac{2\pi d/3 + d\sqrt{3}}{v} = \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \frac{v}{a}. \quad (3)$$

Заметим, что в каждом из двух пунктов, рассмотренных выше, корабль на оптимальной траектории всегда движется с “экстремальным” ускорением: либо по прямой с нулевым ускорением, либо по дуге наибольшей кривизны с ускорением a . Легко понять, что это общее свойство оптимальных траекторий.

Теперь перейдём к определению оптимальной траектории между точками O и A. Рассуждать можно следующим образом. В первую очередь заметим, что нет смысла начинать движение по дуге окружности радиуса d с центром в точке A. Действительно, по отношению к точке A все точки этой окружности эквивалентны, так что корабль никак не “улучшает” своего положения (такое движение просто равносильно повороту исходного рисунка в условии задачи). Чтобы не терять время, следует двигаться иначе. Из расположения точки A легко понять, что в эту точку корабль должен попасть по траектории наибольшей кривизны, а не по прямой. Рассмотрим два предельных варианта выхода на финальную дугу.

Во-первых, можно двигаться с нулевым ускорением по касательной к окружности, содержащей точку A (см. Рис. 3, слева). Легко сосчитать путь корабля, который складывается из отрезка касательной OE длиной d и трёх четвертей длины окружности. Для времени движения получаем

$$T_{OA}^{(1)} = \frac{d + 3\pi d/2}{v} = \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) \frac{v}{a} \approx 5,71 \frac{v}{a}. \quad (4)$$

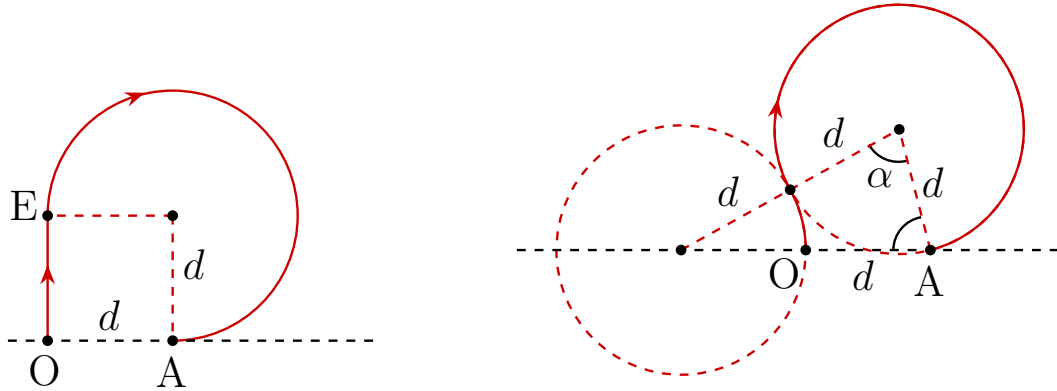


Рис. 3:

Во-вторых, рассмотрим случай, когда корабль начинает движение по окружности минимального радиуса, удаляясь от точки A, а затем переходит на другую окружность, уже содержащую точку A (см. Рис. 3, справа). Угол α на рисунке легко найти из геометрии:

$$\cos \alpha = \frac{d/2}{2d} = \frac{1}{4} \implies \alpha = \arccos \frac{1}{4} \approx 1,32 \text{ рад.}$$

Теперь, складывая длины двух дуг, получаем путь $s = (\pi - 2\alpha)d + (2\pi - \alpha)d = 3(\pi - \alpha)d$. Время движения:

$$T_{OA}^{(2)} = 3\left(\pi - \arccos \frac{1}{4}\right) \frac{v}{a} \approx 5,47 \frac{v}{a}. \quad (5)$$

Сравнивая ответы (4) и (5) для двух предельных траекторий, выбираем наименьшее значение $T_{OA} = T_{OA}^{(2)}$.

Ответ: $T_{OA} = 3[\pi - \arccos(1/4)](v/a)$, $T_{OB} = \pi v/a$, $T_{OC} = (2\pi/3 + \sqrt{3})(v/a)$.

Задача 2.

Рассмотрим положение гантели после поворота на некоторый угол φ и изобразим все внешние силы (см. Рис. 4). В ходе движения переменная сила $\vec{N}_x$ обеспечивает отсутствие горизонтального смещения нижнего шарика; наличие этой силы также связано с тем, что центр масс гантели смещается налево с переменной скоростью (шарики маленькие, их размером можно пренебречь, поэтому все силы на рисунке приложены к центрам шариков). Вертикальная же компонента $\vec{N}_y$ является той силой, которую нам требуется проанализировать. Действительно, условие отрыва левого шарика от поверхности записывается в форме $N_y = 0$ (когда пропадёт вертикальная компонента, сразу автоматически обратится в нуль и горизонтальная). Запишем второй закон Ньютона для гантели в проекции на вертикальную ось y :

$$2ma_y^{(\text{цм})} = F + N_y - 2mg = N_y, \quad (6)$$

где мы воспользовались условием $F = 2mg$. Уравнение (6) говорит о том, что момент отрыва левого шарика связан с обнулением вертикальной проекции ускорения центра масс гантели $a_y^{(\text{цм})}$.

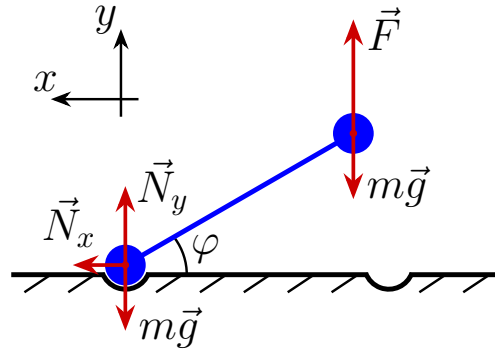


Рис. 4:

Теперь нам требуется понять, при каком значении угла φ срабатывает условие $a_y^{(\text{цм})} = 0$. Заметим, что ускорение центра масс $\vec{a}^{(\text{цм})}$ и ускорение правого шарика $\vec{a}$ всё время вплоть до отрыва связаны простым соотношением $\vec{a}^{(\text{цм})} = \vec{a}/2$, поскольку левый шарик неподвижен. Запишем условие отрыва в форме $a_y = 0$ и более детально рассмотрим динамику правого шарика. Силы, действующие на правый шарик, изображены на Рис. 5. Сила $\vec{R}$ со стороны стержня всегда направлена *вдоль* стержня, поскольку по условию задачи он безмассовый (действующие на него силы должны быть скомпенсированы и иметь нулевой суммарный момент). Чтобы в наши уравнения не входила неизвестная сила $\vec{R}$, используем второй закон Ньютона для правого шарика в проекции на перпендикуляр к стержню (направление скорости правого шарика). Для удобства в левой верхней части Рис. 5 изображены тангенциальная и нормальная компоненты ускорения $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. В результате имеем:

$$ma_\tau = (F - mg) \cos \varphi = mg \cos \varphi \implies a_\tau = g \cos \varphi. \quad (7)$$

Условие $a_y = 0$ можно записать в форме

$$a_n \sin \varphi = a_\tau \cos \varphi,$$

что с учётом (7) даёт нам

$$a_n \sin \varphi = g \cos^2 \varphi. \quad (8)$$

Пока мы ничего не знаем про величину нормального ускорения a_n . Из кинематики можно записать

$$a_n = \omega^2 l, \quad (9)$$

где l — длина стержня и ω — его угловая скорость (скорость изменения угла φ). Нам осталось связать угловую скорость ω с самим углом φ . Сделать это можно с помощью закона сохранения энергии. Работа внешней силы $\vec{F}$ равна сумме кинетической энергии гантели и изменения её потенциальной энергии. Оба вклада связаны лишь с правым шариком:

$$Fl \sin \varphi = \frac{m(\omega l)^2}{2} + mgl \sin \varphi. \quad (10)$$

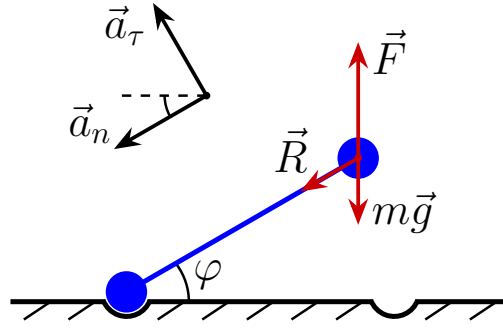


Рис. 5:

Для нахождения работы силы $\vec{F}$ мы умножили модуль силы на вертикальную проекцию перемещения правого шарика. Уравнение (10) можно получить и из теоремы о кинетической энергии: кинетическая энергия гантели равна работе внешней силы $\vec{F} + m\vec{g}$, имеющей вертикальную проекцию $F - mg$. С учётом $F = 2mg$ из уравнения (10) легко получить следующее соотношение:

$$\omega^2 l = 2g \sin \varphi. \quad (11)$$

Выражение в левой части — как раз величина нормального ускорения (9). Это позволяет записать условие отрыва (8) в виде

$$2g \sin^2 \varphi = g \cos^2 \varphi \implies \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (12)$$

Приведём несколько эквивалентных форм ответа для угла φ :

$$\varphi = \arctg(\sqrt{2}/2) = \arcsin(\sqrt{3}/3) = \arccos(\sqrt{6}/3) \approx 35^\circ.$$

Заметим также, что для решения задачи можно было вместо гантели в целом рассматривать равновесие левого шарика. Тогда условие отрыва имеет вид $R \sin \varphi = mg$. Для нахождения силы реакции R вместо уравнения (7) достаточно записать второй закон Ньютона для правого шарика в проекции на стержень: $ma_n = R - mg \sin \varphi$. Далее легко исключить R и с учётом соотношений (9) и (11) найти угол φ .

Ответ: $\varphi = \arctg(\sqrt{2}/2) \approx 35^\circ$.

Задача 3.

В ходе процесса, описанного в условии задачи, в баллон с газом А добавили другой газ В. В начале процесса молярная масса содержимого баллона должна совпадать с молярной массой газа А. Из графика видно, что кривая, изображающая процесс, одним концом “начинается” от верхней штриховой линии. Следовательно, верхняя штриховая линия соответствует молярной массе M_A газа А, а нижняя — молярной массе M_B газа В. Крайняя левая точка на графике отвечает конечному состоянию. Из графика видно, что если обозначить через M_K молярную массу газовой смеси в конце процесса, то $M_A/M_K = 8/2 = 4$ и $M_B/M_K = 1/2$. Более того, можно заключить, что в ходе процесса содержимое баллона охладилось; при этом конечная и начальная температуры T_K и T_0 связаны соотношением $T_K/T_0 = 2/10 = 1/5$.

Обозначим через m_A и m_B конечные массы газов А и В в баллоне, а через ν_A и ν_B — соответствующие количества вещества. Тогда конечная молярная масса смеси:

$$M_K = \frac{m_A + m_B}{\nu_A + \nu_B} = \frac{\nu_A M_A + \nu_B M_B}{\nu_A + \nu_B}, \quad (13)$$

откуда получаем, что

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{M_A/M_K - 1}{1 - M_B/M_K}. \quad (14)$$

Пусть V — объём баллона. Поскольку газы можно считать идеальными, их состояния описываются уравнением Менделеева-Клапейрона. В начале процесса давление создается только газом А при температуре T_0 :

$$P_0 = \frac{\nu_A R T_0}{V}. \quad (15)$$

В конце процесса давление создаётся обоими газами, находящимися при температуре T_k . По закону Дальтона, парциальные давления газов складываются

$$P_k = \frac{\nu_A RT_k}{V} + \frac{\nu_B RT_k}{V}. \quad (16)$$

Собирая всё вместе, получаем, что искомое отношение давлений составляет

$$\frac{P_k}{P_0} = \left(1 + \frac{\nu_B}{\nu_A}\right) \frac{T_k}{T_0} = \left(\frac{M_A/M_k - M_B/M_k}{1 - M_B/M_k}\right) \frac{T_k}{T_0} = \frac{7}{5} = 1,4. \quad (17)$$

Ответ: Давление увеличилось в $7/5 = 1,4$ раза.

Задача 4.

Эквивалентная электрическая схема изображена на Рис. 6: сопротивления и источники, находящиеся “на одном проводе” можно переставлять друг с другом, а последовательно соединённые резисторы можно заменять на резисторы с суммарным сопротивлением. Рассчитаем электрические токи в цепи. Обозначим токи, текущие через источники $3\mathcal{E}$, через I_1 и I_2 соответственно; тогда по первому закону Кирхгофа через источник $\mathcal{E}$ течёт ток $I_1 + I_2$ (см. Рис. 6). Из соображений симметрии токи I_1 и I_2 совпадают, то есть $I_1 = I_2$, поэтому для их определения достаточно выписать второй закон Кирхгофа для одного независимого контура:

$$3\mathcal{E} + \mathcal{E} = 6RI_1 + R(I_1 + I_2), \quad (18)$$

откуда получаем

$$I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R}. \quad (19)$$

Мощность тепловыделения можно рассчитать, применив закон Джоуля-Ленца для каждого из сопротивлений:

$$P_I = (I_1^2 + I_2^2) 6R + (I_1 + I_2)^2 R = \frac{4\mathcal{E}^2}{R}. \quad (20)$$

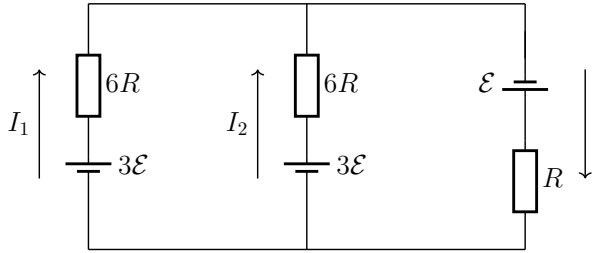


Рис. 6:

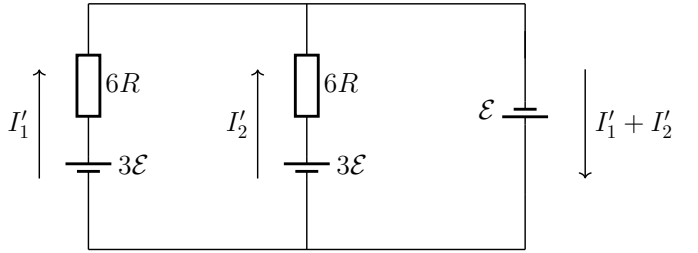


Рис. 7:

Рассмотрим теперь электрическую схему после того, как в ней закоротили резистор с сопротивлением R . Соответствующая эквивалентная схема изображена на Рис. 7. В этом случае обозначим токи I'_1 и I'_2 . В силу симметрии по-прежнему выполняется $I'_1 = I'_2$. Второй закон Кирхгофа:

$$3\mathcal{E} + \mathcal{E} = 6RI'_1, \quad (21)$$

откуда получаем

$$I'_1 = I'_2 = \frac{2\mathcal{E}}{3R}. \quad (22)$$

Мощность тепловыделения:

$$P_{II} = (I'^2_1 + I'^2_2) 6R = \frac{16\mathcal{E}^2}{3R}. \quad (23)$$

Таким образом, отношение мощностей тепловыделения составило $P_{II}/P_I = 4/3$.

Ответ: тепловыделение увеличится в $4/3$ раза.

Задача 5.

В плоскостях, в которых движется светящаяся рамка Р и расположена фотопластинка Ф, введём системы координат так, как это показано на Рис. 8 и 9 соответственно. Обозначим искомую сторону рамки через $2a$, сторону фотопластинки через $2h$. Пусть Y_0 — начальная вертикальная координата центра рамки, тогда в произвольный момент времени t после начала движения центр рамки имеет координату

$$Y_P(t) = Y_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (24)$$

Движение щели на экране Э подчиняется закону

$$y_{\text{щ}}(t) = -h \left(1 - \frac{2t}{\tau} \right). \quad (25)$$

Используя Рис. 9, находим, что вертикальные координаты низа и верха изображения рамки на фотопластинке равны

$$y_1 = -\frac{1}{5}h \equiv \beta_1 h, \quad y_2 = \frac{2}{5}h \equiv \beta_2 h. \quad (26)$$

Горизонтальная координата правого края изображения:

$$x_0 = \frac{4}{5}h \equiv \alpha h. \quad (27)$$

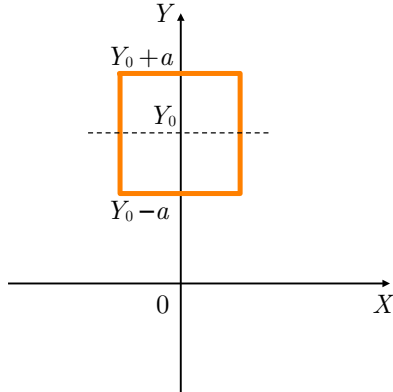


Рис. 8:

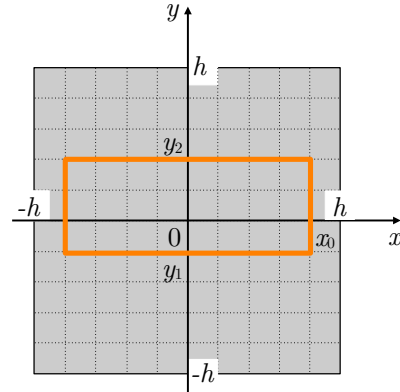


Рис. 9:

Рассмотрим, как получается изображение рамки на фотопластинке. Пусть d — расстояние от плоскости движения рамки до линзы, f — расстояние от линзы до фотопластинки. Согласно условию, на фотопластинке формируется “резкое” изображение. Это означает, что лучи от источника света, расположенного в плоскости движения рамки, фокусируются в точности в плоскости, в которой расположена фотопластинка, см. Рис. 10. При этом, если в момент времени t щель на экране находится в положении (25), то изображение дают только светящиеся точки, имеющие вертикальные координаты

$$Y(t) = -\frac{d}{f} y_{\text{щ}}(t) = \frac{dh}{f} \left(1 - \frac{2t}{\tau} \right). \quad (28)$$

Таким образом, в момент времени t свет от рамки попадает на фотопластинку только при условии, что

$$|Y(t) - Y_P(t)| \leq a. \quad (29)$$

При этом, если выполняется строгое неравенство, то на фотопластинку попадает свет от боковых сторон рамки, а если выполняется равенство, то на фотопластинку появляется полоска от одной из горизонтальных сторон. Ясно, что ширины рамки и её изображения соотносятся так же, как вертикальные координаты в (28):

$$a = \frac{d}{f} x_0, \quad (30)$$

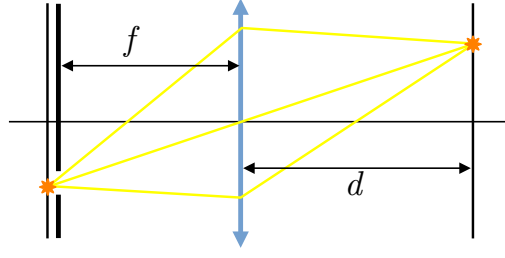


Рис. 10:

откуда с учётом (27) получаем важное соотношение между геометрическими параметрами задачи:

$$\alpha = \frac{af}{hd}. \quad (31)$$

На фотопластинке имеется две горизонтальных линии. Следовательно, равенство в (29) было выполнено два раза, и это имело место в моменты времени t_1 и $t_2 > t_1$, такие что

$$y_{1,2} = -h \left(1 - \frac{2t_{1,2}}{\tau} \right) \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{y_{1,2} + h}{2h} \tau = \frac{\beta_{1,2} + 1}{2} \tau. \quad (32)$$

Мыслимы две ситуации:

1. Изначально рамка располагалась достаточно высоко, так что

$$Y_0 - a > Y(0). \quad (33)$$

После того, как её отпустили, равенство в (29) выполнилось сначала для нижней стороны рамки, а потом для верхней.

2. Изначально рамка располагалась так, что

$$Y_0 + a < Y(0). \quad (34)$$

При этом равенство в (29) дважды выполнилось для верхней стороны: сначала “сканирующий” луч догнал рамку, но затем она ускорилась под действием силы тяжести и “выскочила” из области его действия.

Здесь в обоих случаях $Y(0) = dh/f = a/\alpha$.

Составим системы уравнений для нахождения начального положения Y_0 и размера рамки a . В первом случае имеем:

$$Y_P(t_1) - a = Y(t_1), \quad Y_P(t_2) + a = Y(t_2). \quad (35)$$

Во втором:

$$Y_P(t_1) + a = Y(t_1), \quad Y_P(t_2) + a = Y(t_2). \quad (36)$$

Подставляя (24) и (28), получаем:

$$Y_0 + \left(\frac{\beta_1}{\alpha} \mp 1 \right) a = \frac{g\tau^2}{8} (\beta_1 + 1)^2, \quad (37)$$

$$Y_0 + \left(\frac{\beta_2}{\alpha} + 1 \right) a = \frac{g\tau^2}{8} (\beta_2 + 1)^2, \quad (38)$$

где в первом уравнении верхний знак отвечает (35), а нижний — (36). Решая уравнения, получаем, что в первом случае $a = 3/500$ м = 0.006 м и $Y_0 = 31/2000$ м = 0.0155 м. Во втором случае $a = 11/500$ м = 0.022 м и $Y_0 = -17/2000$ м = -0.0085 м. Легко проверить, что для обоих случаев необходимые условия (33) и (34) выполняются. Проверим также, что во втором случае “сканирующий” луч на интервале времени от t_1 до t_2 не успевает догнать

нижнюю сторону рамки. Если бы это произошло, то на пластинке появились бы дополнительные горизонтальные линии (одна или даже две). Рассмотрим расстояние от “сканирующего” луча до нижней стороны рамки, как функцию времени:

$$S(t) = Y(t) - (Y_P(t) - a) = \frac{gt^2}{2} - \frac{2at}{\alpha\tau} - \left(Y_0 - a - \frac{a}{\alpha}\right). \quad (39)$$

Данная функция представляет собой параболу с положительным коэффициентом при старшей степени. Дискриминант равен

$$D = \frac{4a^2}{\alpha^2\tau^2} + 2g\left(Y_0 - a - \frac{a}{\alpha}\right) \quad (40)$$

и при полученных для второго случая значениях параметров отрицателен. Таким образом, расстояние $S(t)$ всегда положительно.

Ответ: размер рамки мог быть 12 мм или 44 мм.