

Городской тур 2025/26. 11 класс

Задача 1. Рассмотрев движение каждого груза по второму закону Ньютона, легко найти ускорение, с которым груз m поднимается вдоль клина:

$$a = \frac{(M - m \sin \alpha)g}{M + m}.$$

Из рисунка 1 можно понять, что когда груз m проходит путь L вдоль клина, «зайчик» на потолке перемещается на $L/(2 \cos \alpha)$. Определить это легко, если рассмотреть красный треугольник и заметить, что он равнобедренный по равенству углов при основании, а также, что эти углы равны α .

Так как это соображение верно для любого отрезка пути, то и скорость, и ускорение «зайчика» получаются из скорости и ускорения груза m , посредством деления на $2 \cos \alpha$. Отсюда ускорение «зайчика»

$$a_3 = \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{(M - m \sin \alpha)g}{2(M + m) \cos \alpha} = \frac{g}{2(1 + z)} \frac{(1 - z \sin \alpha)}{\cos \alpha},$$

где в последнем равенстве мы для удобства записали ответ с помощью безразмерного параметра $z = m/M$.

В каком случае это выражение минимально? Очевидно, нужно продифференцировать a_3 по α и приравнять производную нулю:

$$\frac{da_3}{d\alpha} = \frac{g}{2(1 + z)} \frac{d}{d\alpha} \frac{(1 - z \sin \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{g}{2(1 + z)} \frac{-z \cos^2 \alpha + (1 - z \sin \alpha) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{g}{2(1 + z)} \frac{(-z + \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Это даёт экстремум при $\sin \alpha = z = m/M$. Можно убедиться, что вычисленная нами производная при $\sin \alpha < z$ отрицательна, и исследуемая функция $a_3(\alpha)$ на этом интервале убывает. При $\sin \alpha > z$ производная положительна, функция $a_3(\alpha)$ при таких α возрастает. Значит, найденное решение — действительно минимум, а не максимум.

Ответ: Ускорение «зайчика»

$$a_3 = \frac{(M - m \sin \alpha)g}{2(M + m) \cos \alpha},$$

оно минимально при $\alpha = \arcsin(m/M)$.

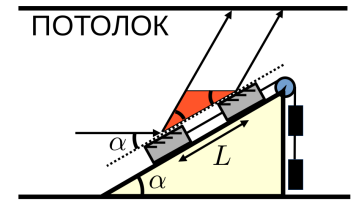


Рис. 1:

Задача 2. В типичной задаче о круговом движении точечного заряда в магнитном поле B сила Лоренца $F_L = qBV$ обеспечивает центростремительную силу $\vec{F}_{\text{цстр}} = m\omega_0^2 R$. В задачах обычно приравнивают эти величины:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{цстр}} \quad (1)$$

откуда получается, что движение будет происходить с угловой скоростью $\omega_0 = qB/m$.

В нашей задаче сила Лоренца также должна равняться центростремительной силе, однако сила Лоренца у гантели приложена к заряду, а центростремительная сила — к центру масс. Эти точки не совпадают и соответствуют разным концам гантели. Точки эти даже движутся с разными скоростями!

Как же может двигаться в магнитном поле наша гантель? Анализ удобнее проводить, используя эквивалентный по отношению к (1) способ: надо перейти во вращающуюся систему отсчёта, где предполагается, что гантель находится в равновесии под действием силы со стороны поля и центробежной силы:

$$\vec{F}_L + \vec{F}_{\text{цб}} = 0.$$

Фактически, это то же самое равенство (1), где вклад $\vec{F}_{\text{цстр}} = m\vec{a}_{\text{цстр}}$ перенесли в левую часть равенства с противоположным знаком $\vec{F}_{\text{цб}} = -\vec{F}_{\text{цстр}}$. В такой системе отсчёта мы можем просто следить, чтобы гантель была неподвижна.

Если стержень ориентирован не радиально, силы $\vec{F}_L$ и $\vec{F}_{\text{цб}}$, даже будучи равны, будут разворачивать гантель (см. рис. 2), и это не является устойчивым вращением.

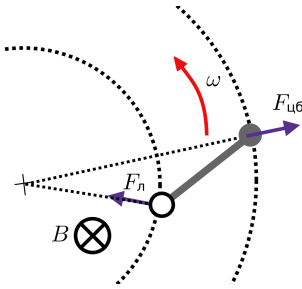


Рис. 2:

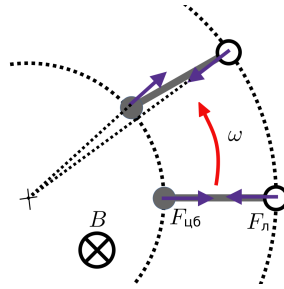


Рис. 3:

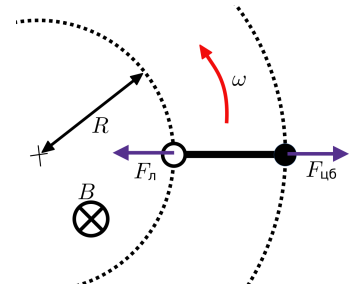


Рис. 4:

Вращение как на рис. 3 — когда массивный шарик ближе к центру вращения, чем заряженный, а стержень направлен по радиусу, — на первый взгляд возможно, однако, можно догадаться, что и оно неустойчивое. Действительно, пусть по случайной причине гантель немного повернулась, отклонившись от радиальной ориентации. Понятно, что далее силы $\vec{F}_L$ и $\vec{F}_{\text{цб}}$ еще сильнее отклонят её.

А вот вращение как на рис. 4 является устойчивым. В этом случае заряд вращается по окружности радиуса R , а масса — по окружности радиуса $R + a$. Оба круговых движения происходят с одинаковой угловой скоростью. Скорость заряда ωR , поэтому $F_L = qB\omega R$. Скорость центра масс $\omega(R + a)$, поэтому $F_{\text{цб}} = m\omega^2(R + a)$. Приравняв силы, получаем

$$qB\omega R = m\omega^2(R + a) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{qB}{m} \frac{R}{R + a} = \omega_0 \frac{R}{R + a} < \omega_0 = \frac{qB}{m}.$$

Здесь мы использовали удобное обозначение ω_0 — циклотронную частоту.

Итак, получается, что гантель может вращаться в магнитном поле аналогично точечному заряду, но с угловой скоростью, меньшей, чем вращался бы точечный массивный заряд в таком же поле. Так как по условию дано ω , а требуется R , легко выразим ответ

$$R = \frac{\omega a}{\omega_0 - \omega}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{qB}{m}. \quad (2)$$

Требуемый радиус существует для всех $\omega < \omega_0$.

А что если в условии ω не удовлетворяет этому неравенству? Оказывается, существует еще одно решение (см. рис. 5), оно соответствует вращению гантели в другую сторону — когда сила Лоренца не притягивает заряд к центру, а наоборот, отталкивает! Выполняя аналогичные выкладки, получим те же результаты для силы Лоренца $F_L = qB\omega R$, а вот скорость центра масс будет теперь $\omega(a - R)$, поэтому $F_{\text{цб}} = m\omega^2(a - R)$, так что

$$qB\omega R = m\omega^2(a - R) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 \frac{R}{a - R}.$$

Радиусы траекторий шариков R и $a - R$ могут соотноситься как угодно (хотя, конечно $R < a$), поэтому такое решение существует для любых ω . Из последнего равенства снова легко выразить ответ:

$$R = \frac{\omega a}{\omega + \omega_0}. \quad (3)$$

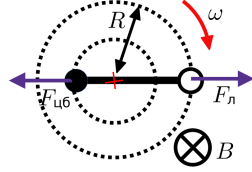


Рис. 5:

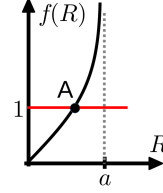


Рис. 6:

На самом деле, это ещё не всё. Следует проверить, что оба полученных решения устойчивы при случайном изменении R . Для этого надо рассмотреть малый сдвиг к найденному решению $R \rightarrow R + \Delta r$ и убедиться что при таком нарушении центробежная сила возрастает слабее, чем сила Лоренца, и возникший дисбаланс будет отклонять гантель обратно к центру.

Выполним такой анализ, например, для первого из двух найденных решений. Запишем снова тот же самый баланс сил (слева сила Лоренца, справа — центробежная):

$$qB\omega R = m\omega^2(a - R) \quad \Rightarrow \quad \frac{qB}{m\omega} \frac{R}{a - R} = 1.$$

Последнее уравнение можно решать графически. График левой части $f(R)$ качественно представлен на рис. 6), там же изображено графическое решение — пересечение нашего графика с единичной прямой. Решение даёт некоторую точку А. Если R чуть-чуть увеличить, мы сместимся из равновесной точки А на графике вправо, где график f будет лежать выше единичной прямой, то есть левая часть равенства превысит правую: $f(R + \Delta r) > 1$. Но это соответствует превышению силы Лоренца над центробежной, и разница этих сил действительно будет тянуть гантель обратно к центру.

Аналогичный анализ, доказывающий, что второе решение тоже устойчиво, мы предоставляем читателю.

Ответ: Если $\omega > \omega_0 = qB/m$, существует единственное устойчивое решение, представленное на рис. 5), когда $R = \omega a / (\omega + \omega_0)$. Если $\omega < \omega_0$, появляется второе устойчивое решение, представленное на рис. 4, когда $R = \omega a / (\omega_0 - \omega)$. Вращательные движения гантели других типов неустойчивы.

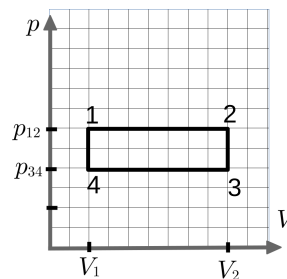
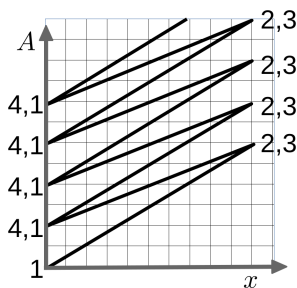
Задача 3. Обозначим площадь поршня S .

На графике $A(x)$ повторяются два участка: в первом поршень сдвигается на 10 клеток, при этом равномерно совершается работа (график поднимается на 6 клеток). Затем поршень возвращается обратно, совершая отрицательную работу на 4 клетки.

Так как работа при сдвиге поршня на малую величину dx равна $\delta A = p dV = p S dx$, она будет меняться пропорционально dx с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, только если давление постоянно. Значит, первому отрезку соответствует изобарическое расширение, а второму отрезку – изобарическое сжатие. Так как угол наклона первого отрезка больше, то и давление в первом изобарическом этапе больше, чем во втором.

Между первым и вторым этапами давление должно было измениться (уменьшиться), а на нашем графике только два участка, то есть соответствующие этапы отсутствуют. Однако, легко сообразить, что изохорические процессы вообще не отображаются на графике $A(x)$ – на изохоре не меняется координата поршня и не совершается работа. Значит, на конце каждого зубца на самом деле происходил этап изохорического охлаждения (на правых концах зубцов) или нагрева (на левых концах).

Значит, сам цикл в осях $p - V$ представляет собой прямоугольный контур, см. соответствие на рисунках ниже. Отметим, что $V_2 - V_1$ соответствует 10 клеткам, а так как по условию задачи это соответствует удвоению объёма газа, то $V_1 = 10bS$.



Осталось посчитать КПД: отношение работы, совершённой за цикл, к Q_+ – суммарной теплоте тех участков цикла, где газ поглощал тепло.

Работа, совершённая за цикл, $A_{\text{за цикл}}$ видна из графика к условию – это $6 - 4 = 2$ клетки, на которые увеличивается совершённая поршнем работа за каждый период. Обозначим это значение для удобства $2a$, выбрав величину a с размерностью работы (Дж) за высоту одной клетки. Аналогично обозначим через b ширину одной клетки (b – величина с размерностью длины).

Теплота передавалась газу лишь в процессах 1-2 и 4-1. Найдём соответствующие теплоты Q_{12} и Q_{41} .

Теплота Q_{12} , переданная в изобарическом процессе, связана с работой в этом процессе $A_{12} = 6a$:

$$Q_{12} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} p_{12} (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} A_{12} = \frac{5}{2} 6a = 15a.$$

В изохорическом процессе 4-1 работа не совершалась, а переданная теплота целиком тратилась на увеличение внутренней энергии газа

$$Q_{41} = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_4) = \frac{3}{2} (p_{12} - p_{23}) V_1 = \frac{3}{2} (p_{12} - p_{23}) 10bS.$$

Давления p_{12} и p_{23} можно установить по коэффициенту наклона отрезков исходного графика $\delta A/dx$:

$$\delta A = p S dx \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{S} \frac{\delta A}{dx},$$

откуда

$$p_{12} = \frac{6a}{10bS}, \quad p_{34} = \frac{4a}{10bS}.$$

Подставляя эти давления в формулу для Q_{41} , получим $Q_{41} = 3a$. Полная теплота, переданная газу в цикле, $Q_+ = Q_{12} + Q_{41} = 18a$. Значит, КПД $\eta = A_{\text{за цикл}}/Q_+ = 2/18$.

Ответ: КПД составляет 1/9, или примерно 11%.

Задача 4. Докажем, что теплота, выделяющаяся в первом опыте, пропорциональна v_0 . Сначала сделаем это строго, а потом объясним, как этот же результат можно получить из логических соображений.

Магнит располагается на меняющемся расстоянии x от кольца, так как движется со скоростью v_0 . Поэтому он создаёт через кольцо переменный магнитный поток $\Phi(x)$ (где $x = v_0 t$). Скорость изменения магнитного потока производит ЭДС индукции, которая вычисляется по закону Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{dx}v_0 = -\Phi'(x)v_0.$$

Здесь мы использовали, что $dt = dx/v_0$ и обозначили через $\Phi'(x)$ производную функции Φ по координате. Величина $\mathcal{E}$ зависит от x , а значит, меняется во времени. Если сопротивление кольца R_0 , через кольцо течёт переменный ток $I = \mathcal{E}/R_0$ и выделяется теплота. По закону Джоуля-Ленца мощность этой теплоты

$$w = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0} = \frac{1}{R_0}\Phi'^2(x)v_0^2.$$

Эта мощность меняется во времени, поэтому суммарно за всё время движения кольца выделившаяся теплота запишется в виде интеграла

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = \frac{1}{R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^2(x)v_0^2 dt.$$

Теперь $v_0 dt$ можно снова заменить на dx :

$$Q = \frac{v_0}{R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^2(x)dx.$$

Значение интеграла здесь зависит от того, как меняется магнитный поток при удалении от магнита — то есть от свойств самого магнита и его магнитного поля, а не от того, как магнит движется. Вся зависимость от движения — множитель v_0 . Таким образом, заключаем, что выделившаяся в кольце теплота прямо пропорциональна скорости, с которой через неё протаскивают магнит, $Q \sim v_0$.

Вышеизложенное доказательство можно провести без выкладок и без интегралов. Рассмотрим малый отрезок на пути магнита dx . Магнит преодолевает его за время dt , и при этом поток через кольцо меняется на $d\Phi$. ЭДС в кольце на этом отрезке пути $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, ток $I = \mathcal{E}/R_0$, мощность тепловыделения $W = \mathcal{E}^2/R_0$.

Если магнит бы стал двигаться с вдвое большей скоростью, $\mathcal{E}$ увеличилось бы в 2 раза, ведь то же изменение $d\Phi$ происходит теперь в два раза быстрее. В два раза возрастёт и ток, а W — в 4 раза. Однако выделившаяся теплота dQ за время, пока магнит преодолевает dx , возрастёт только в 2 раза, ведь $dQ = Wdt$, а dt уменьшилось в 2 раза. Значит dQ на каждом интервале пути dx прямо пропорционально скорости движения магнита. Но отсюда и вся теплота Q на всех интервалах суммарно также пропорциональна v_0 .

Теперь задача решается практически устно. Когда магнит падает в трубе, в кольцах, из которых состоит труба, выделяется тепло. По мере разгона магнита теплота увеличивается. При этом токи, возникающие в кольцах, тормозят своим магнитным полем падающий магнит, а магнит, в свою очередь, «разгоняет токи» в кольцах за счёт своей кинетической энергии. В результате, магнит перестанет разгоняться в тот момент, когда вся работа силы тяжести будет целиком расходоваться на тепловыделение в кольцах.

Предположим, магнит уже долго падает с искомой установившейся скоростью u . В каждом кольце, к которому магнит в дальнейшем приблизится и которое проскочит, выделится за всё время теплота Qu/v_0 . Пролетая участок трубы длиной H , магнит преодолеет nH колец, в которых суммарно выделится теплота $nHQu/v_0$. Значит, в расчёте на единицу длины трубы в системе за всё время выделяется энергия $\epsilon = nQu/v_0$ (ϵ измеряется в Дж/м).

Вся выделившаяся теплота E во всех кольцах за всё время выделяется равномерно во времени (со средней мощностью $W = E/t$); равномерно распределена эта теплота и в расчёте на единицу длины трубы ($\epsilon = E/H$), значит

$$E = Wt = \epsilon H \quad \Rightarrow \quad W = \epsilon \frac{H}{t} = \epsilon u = nQ \frac{u^2}{v_0}.$$

Чтобы магнит двигался равномерно, W должна совпадать с мощностью силы тяжести mg :

$$nQ \frac{u^2}{v_0} = mg \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mgv_0}{nQ}.$$

Ответ: Максимальная скорость $u = mgv_0/nQ$. Теплота выделяется по закону Фарадея: переменное магнитное поле порождает в кольце вихревые токи, которые постепенно затухают по закону Джоуля-Ленца.

Задача 5. Диоды налагают ограничение на знак, который имеют токи в схеме.

Пока ключ не замкнут, в нашей схеме ток может циркулировать лишь по двум контурам, представленным на рис. 7 зелёным и синим цветом. Именно для этих контуров нам нужно записать первый и второй законы Кирхгофа. В качестве направления тока в контуре мы выбрали такое, в котором «стремится запустить» ток батарейка в этом контуре.

Можно проверить, что любые другие замкнутые контуры, по которым батарейки могли бы запустить ток, содержат диоды, которые «не дают» батарейке это сделать. В качестве примера посмотрите на красный контур — в нём батарейка «пытается» запустить ток по красной стрелке, однако диоды включены в противоположном направлении.

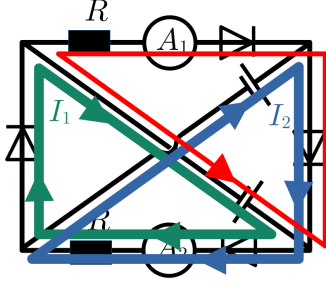


Рис. 7:

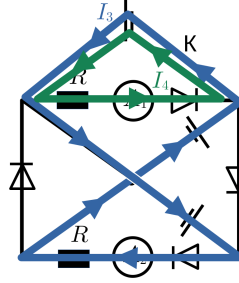


Рис. 8:

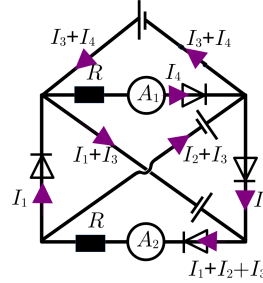


Рис. 9:

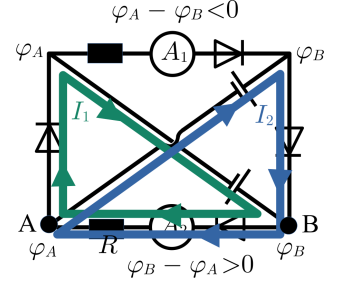


Рис. 10:

Обозначим ток, циркулирующий в зелёном контуре I_1 , а в синем I_2 . При этом через нижнее сопротивление и нижний диод течёт ток $I_1 + I_2$, а по верхней ветке не течёт вообще; через одну батарейку (и её внутреннее сопротивление) течёт ток I_1 , через другую I_2 . Законы Кирхгофа для данных контуров:

$$\mathcal{E} = (I_1 + I_2)R + I_1 r, \quad \mathcal{E} = (I_1 + I_2)R + I_2 r.$$

Решая эту систему, получаем $I_1 = I_2 = \mathcal{E}/(2R + r)$, что с учётом $r = 2R$ даёт $I_1 = I_2 = \mathcal{E}/(4R)$. Значит, до замыкания ключа первый амперметр показывает ноль, а второй $I_1 + I_2 = \mathcal{E}/(2R)$.

Пусть теперь ключ замкнули. У нашей схемы открылись новые возможности: к предыдущим контурам добавилось ещё два. Они представлены на рис. 8 зелёным и синим цветом. Обратите внимание, что в «синем» контуре на рис. 8 все три батарейки включены в направлении контура, то есть «суммируют свои ЭДС».

Обозначим токи, которые циркулируют в новых контурах, через I_3 и I_4 . На рис. 9 показаны токи, которые теперь текут через каждый элемент схемы. Запишем законы Кирхгофа для всех четырёх получившихся контуров, для «старых» контуров:

$$\mathcal{E} = (I_1 + I_2 + I_3)R + (I_1 + I_3)r, \quad \mathcal{E} = (I_1 + I_2 + I_3)R + (I_2 + I_3)r$$

— и для контуров, появившихся после замыкания ключа:

$$\mathcal{E}_x = I_4 R + (I_3 + I_4)r, \quad \mathcal{E}_x + 2\mathcal{E} = (I_1 + I_2 + I_3)R + (I_3 + I_4)r + (I_2 + I_3)r + (I_1 + I_3)r.$$

Казалось бы, нужно просто решить систему этих уравнений. Однако она несовместна — таких решений не бывает. Это видно, если, например, из суммы первых трёх уравнений вычесть последнее уравнение:

$$0 = (I_1 + I_2 + I_3)R + I_4 R.$$

Здесь ток $I_1 + I_2 + I_3$ течёт через нижний диод, он не может быть отрицательным; ток I_4 течёт через верхний диод, он тоже не может быть отрицательным. Сумма в последнем равенстве может обратиться в ноль, только если эти токи обратились в ноль.

Значит, наше предположение о том, что во всех четырёх контурах после замыкания ключа циркулирует ток, неверно: какой-то из диодов будет закрыт, так что циркуляция по одному из контуров (или нескольким) будет отсутствовать. Если закрыт верхний диод, пропадёт контур с циркуляцией тока I_4 , если закрыт левый диод — пропадёт ток с циркуляцией I_1 и т.д. То, какой именно контур выпадет из нашей системы уравнений, зависит от величины $\mathcal{E}_x$.

Можно провести полный анализ, рассмотрев все возможные варианты — выкидывая из системы уравнений один контур за другим, решая систему и проверяя, не стал ли ток через какой-то диод отрицательным. Однако в задаче предлагается исследовать только режим $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/6$. Какой контур попробовать выкинуть? В схеме до замыкания ключа разность потенциалов между точками А и В была равна $\varphi_B - \varphi_A = R(I_1 + I_2) = \mathcal{E}/2 > 0$, и верхний диод был закрыт этой же разностью потенциалов (см. рис. 10). По условию значение $\mathcal{E}_x$ гораздо меньше, чем $\mathcal{E}/2$, поэтому логично предположить, что напряжения верхней батарейки не хватит, чтобы открыть верхний диод.

Поэтому разумно попробовать рассмотреть систему уравнений, в которой циркулируют лишь токи I_1 , I_2 и I_3 (а ток I_4 равен нулю, так как верхний диод остался закрытым). Если решение такой системы не приведёт к отрицательным токам через диоды — мы угадали.

Соответствующая система уравнений из законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= (I_1 + I_2 + I_3)R + (I_1 + I_3)r, & \mathcal{E} &= (I_1 + I_2 + I_3)R + (I_2 + I_3)r \\ \mathcal{E}_x + 2\mathcal{E} &= (I_1 + I_2 + I_3)R + I_3r + (I_2 + I_3)r + (I_1 + I_3)r.\end{aligned}\tag{4}$$

Можно упростить выкладки, заметив, что I_1 и I_2 входят в систему симметрично, так что сложив первые два уравнения можно сразу искать $I_{12} = I_1 + I_2$:

$$2\mathcal{E} = I_{12}(2R + r) + 2I_3(r + R).$$

Вместо нижнего уравнения системы (4) снова удобно рассмотреть его разность с суммой первых двух уравнений

$$\mathcal{E}_x = I_3r - (I_1 + I_2 + I_3)R = I_3(r - R) - I_{12}R.$$

Подстановка $r = 2R$ и $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/6$ даёт простую систему

$$2\mathcal{E} = 4RI_{12} + 6RI_3, \quad \mathcal{E}/6 = I_3R - I_{12}R,$$

с ответами $I_{12} = \mathcal{E}/(10R)$ и $I_3 = 4\mathcal{E}/(15R)$. При этом $I_1 = I_2 = I_{12}/2$. Все циркулирующие токи получились положительными, значит, мы угадали с нашим предположением. Через нижний диод потечёт ток $I_{12} + I_3 = 11\mathcal{E}/(30R)$

Ответ: До замыкания ключа первый амперметр показывает ноль, а второй — ток $\mathcal{E}/(2R)$. После замыкания первый амперметр по-прежнему показывает ноль, а второй — ток $11\mathcal{E}/(30R)$.