

Городская открытая олимпиада школьников по физике 2025/26 г.
Заключительный этап, теоретический тур, 7 класс

Возможные решения задач

Задача 1. «Многогранная» задача.

Заметим, что тетраэдр имеет 4 вершины и 6 рёбер. То есть модель тетраэдра из конструктора состоит из четырёх шариков и шести стержней. Модель куба состоит из 8 шариков и 12 стержней, что ровно в 2 раза больше, чем у тетраэдра. Тогда масса куба ровно в 2 раза больше массы тетраэдра и равна 122 г.

Модель октаэдра состоит из 6 шариков и 12 стержней. То есть стержней столько же, как в модели куба, а шариков на два меньше. Масса модели октаэдра на 17 г меньше массы модели куба, значит масса двух шариков равна 17 г. Тогда масса одного шарика равна 8,5 г. Масса четырёх шариков в тетраэдре равна 34 г, значит масса шести стержней в тетраэдре равна 27 г. Откуда масса одного стержня равна 4,5 г.

Модель икосаэдра сделана из 12 шариков и 30 стержней. Количество стержней несложно посчитать, если заметить, что с каждым шариком соединены 5 стержней. Значит количество стержней в 5/2 раза больше количества шариков. Суммарная масса модели икосаэдра $8,5 \times 12 + 4,5 \times 30 = 237$ г.

Ответ: масса куба 122 г, масса икосаэдра 237 г.

Задача 2. Встреча на реке.

Обозначим скорость моторной лодки относительно воды v , а скорость течения u . Предположим, что течение реки направлено от А к Б. Если нет, то мы получим отрицательную скорость течения. Первый почтальон сначала плывет по течению со скоростью $v + u$ относительно берега. До первой встречи он проплывёт расстояние $(v + u)t_1$, а второй — $(v - u)t_1$. Первый почтальон после разворота будет плыть против течения со скоростью $v - u$ и вернется в А через время

$$\frac{v + u}{v - u}t_1.$$

Второй почтальон вернется в Б через время

$$\frac{v - u}{v + u}t_1.$$

К моменту, когда первый почтальон вернется в А, второй уже будет плыть из Б в сторону А в течение времени

$$\frac{v + u}{v - u}t_1 - \frac{v - u}{v + u}t_1 = \frac{4vu}{v^2 - u^2}t_1$$

и окажется на расстоянии

$$\frac{4vu}{v + u}t_1$$

от Б. В момент разворота первого почтальона расстояние между двумя почтальонами равно

$$2vt_1 - \frac{4vu}{v + u}t_1 = 2v\frac{v - u}{v + u}t_1.$$

Скорость сближения почтальонов равна $2v$, значит время до второй встречи

$$t_2 = \frac{v - u}{v + u}t_1.$$

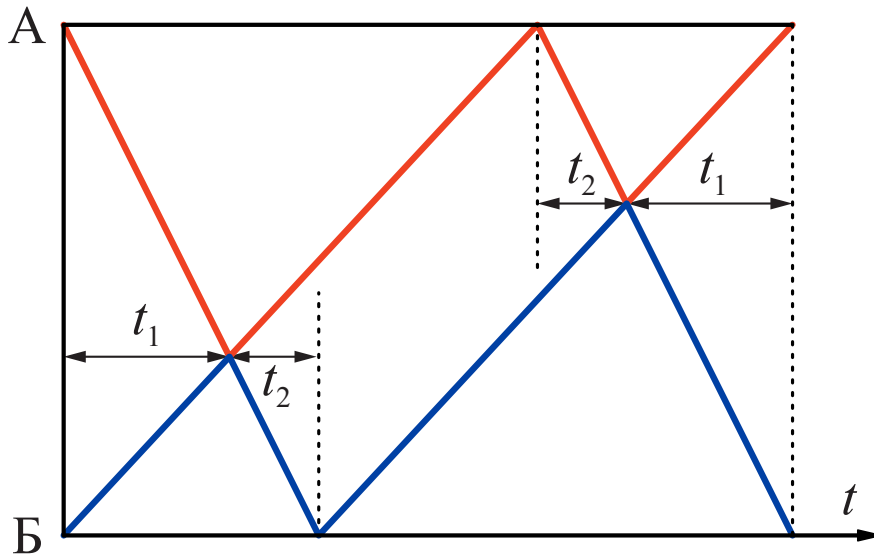
Преобразуем это выражение и получим

$$v(t_1 - t_2) = u(t_1 + t_2).$$

Откуда выражаем отношение скоростей

$$\frac{v}{u} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} = \frac{10}{3}.$$

Возможно также графическое решение задачи. На рисунке показан график движения двух почтальонов. По горизонтальной оси отложено время движения, а по вертикальной оси – координата. Верхняя линия на графике соответствует положению города А, нижняя – городу Б. Красным показан график движения первого почтальона, синим – второго.



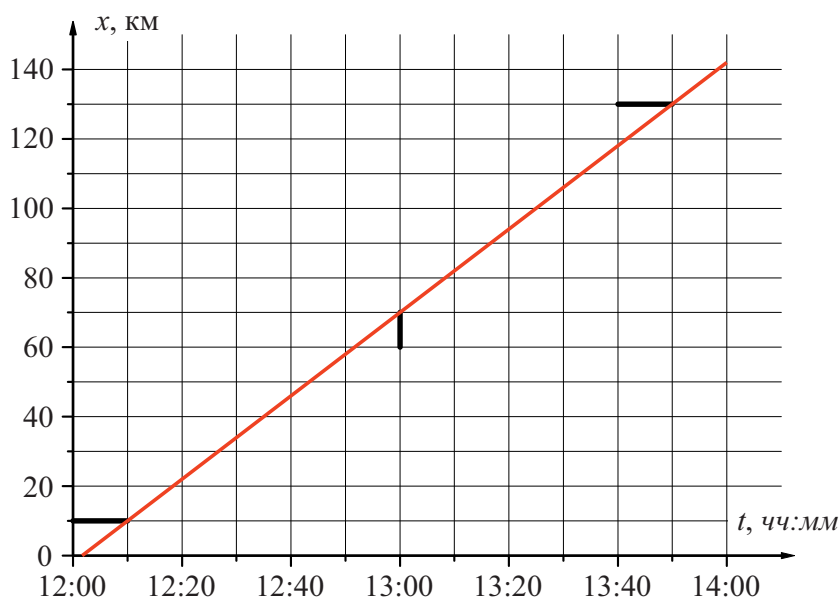
Можно считать, что при встрече почтальоны не разворачиваются, а продолжают плыть дальше, первый доплывает от А до Б, второй — от Б до А. На участке между двумя встречами почтальоны просто меняются местами. В таком случае каждый почтальон проплывет расстояние от А до Б и обратно. Очевидно, что на этот путь оба почтальона затратят одинаковое время. Тогда время от второй встречи почтальонов до возвращения их в свои города также равно t_1 , а время от первой встречи до возвращения второго почтальона в Б равно t_2 . За время t_1 второй почтальон со скоростью $v - u$ проплывает то же расстояние, что и за время t_2 со скоростью $v + u$. Из этого получаем $t_2 = \frac{v-u}{v+u}t_1$, откуда выражаем отношение скоростей

$$\frac{v}{u} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} = \frac{10}{3}.$$

Ответ: Отношение скоростей лодки и течения $v/u = 10/3$.

Задача 3. Рассеянный водитель.

Отметим на графике зависимости координаты от времени возможные положения автомобиля жирными черными линиями.



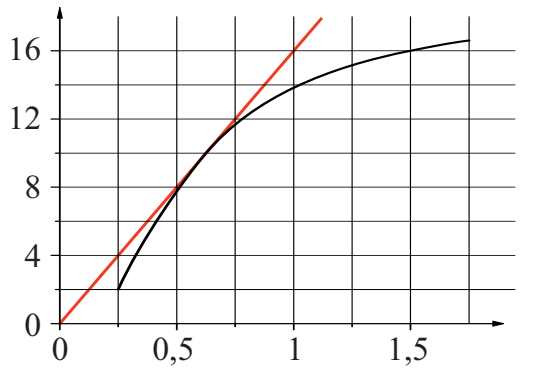
Через отмеченные области можно провести единственную прямую, показанную на рисунке красным цветом. Эта прямая соответствует движению автомобиля. По графику определяем, что за 50 минут с 12:10 до 13:00 автомобиль проехал расстояние 60 км, от 10 км до 70 км. Тогда скорость автомобиля равна $60 \text{ км}/50 \text{ мин} = 72 \text{ км/ч}$.

Ответ: скорость автомобиля 72 км/ч.

Задача 4. Экономичный автомобиль.

Скорость 40 км/ч соответствует темпу движения $60 \text{ мин}/40 \text{ км} = 1,5 \text{ мин/км}$. По графику определяем, что при таком темпе движения автомобиль может ехать 16 часов без дозаправки и проезжает 640 км.

Для ответа на второй вопрос заметим, что расстояние равно произведению скорости и времени движения. Темп движения — величина обратная к скорости, поэтому расстояние можно посчитать как $L = t/T$. Для того, чтобы автомобиль проехал максимальное расстояние, необходимо, чтобы отношение времени t к темпу движения T было максимальным. Точки с постоянным отношением t/T отображаются на графике прямой линией, выходящей из начала координат. Чем больше отношение t к T , тем больше расстояние. Проведем касательную к графику, проходящую через начало координат, как показано на рисунке. Пересечение касательной с графиком будет точкой с наибольшим возможным отношением t/T .



Точка касания с графиком определяется не очень точно, но видим, что касательная проходит через точку $T = 1$ мин/км, $t = 16$ ч. Тогда для всех точек на касательной расстояние, которое проезжает автомобиль, равно 960 км. То есть максимальное расстояние, которое может проехать автомобиль без дозаправки, равно 960 км.

Точка касания графика соответствует времени $t = 10$ ч. Значит максимальное расстояние без дозаправки получается при движении со скоростью $960/10 = 96$ км/ч.

Ответ: при скорости 40 км/ч автомобиль проедет 640 км, максимальное расстояние без дозаправки 960 км при скорости движения 96 км/ч.

Задача 5. Цепочка пружин.

Заметим, что шарик, расположенный сверху такой цепочки, не растягивает ни одной пружины. Второй сверху шарик растягивает только верхнюю пружину. А шарик, расположенный внизу цепочки, растягивает все пружины.

Максимальная длина цепочки будет в том случае, когда нижний шарик имеет самую большую массу, второй снизу шарик — самый тяжелый из оставшихся и т.д. Наконец, самый лёгкий шарик должен оказаться сверху. Наоборот, минимальная длина цепочки будет в случае, когда самый легкий шарик снизу, а самый тяжелый — сверху. Заметим, что минимальной и максимальной длине цепочки соответствует одна и та же цепочка, только подвешенная за разные концы. Следовательно, максимальная разность длин Δl_{max} достигается в случае такой цепочки.

Обозначим жёсткость одной пружины k , а массу самого лёгкого шарика $m = 1$ г и посчитаем растяжение цепочки. В случае, когда снизу висит самый тяжелый шарик массой Nm , он растягивает $N - 1$ пружину. Вклад силы тяжести нижнего шарика в растяжение цепочки равен $(N - 1)Nm g/k$. Следующий по массе шарик массой $(N - 1)m$ растягивает $N - 2$ пружины, все кроме самой нижней. Вклад этого шарика в растяжение цепочки равен $(N - 2)(N - 1)m g/k$. Явно просуммируем все вклады в растяжение для $N = 11$ и получим

$$\frac{N(N + 1)(N - 1)}{3} \frac{mg}{k} = 440 \frac{mg}{k}.$$

Аналогично рассматриваем цепочку минимальной длины. Нижний шарик массой m растягивает цепочку на $(N - 1)m g/k$. Следующий шарик массой $2m$ растягивает цепочку на $(N - 2)2m g/k$. Далее считаем суммарное удлинение в общем виде, или явно для $N = 11$ и получаем

$$\frac{N^3 - N}{6} \frac{mg}{k} = 220 \frac{mg}{k}.$$

Вычитаем из максимальной длины цепочки минимальную и получаем, что

$$\Delta l_{max} = 220 \frac{mg}{k}.$$

Отсюда выражаем

$$k = 220 \frac{mg}{\Delta l_{max}} = 10 \text{ Н/м}.$$

Ответ: жёсткость пружин $k = 10$ Н/м.

Задача 6. Сосуд с трубкой.

Обозначим S площадь поршня П без учета отверстия для трубки, а s — площадь трубки и поршня К. Тогда общая площадь сосуда равна $S + s$. Также мы знаем, что $M = 10$ кг воды дают уровень $H = 50$ см. Это значит, что

$$\rho g H (S + s) = Mg,$$

откуда выражаем сумму площадей

$$S + s = \frac{Mg}{\rho g H} = \frac{M}{\rho H}.$$

Обозначим M_1 массу поршня П и M_2 — массу поршня К. Тогда в начальный момент давление под поршнем П равно $p_0 + M_1 g / S$, а давление под поршнем К равно $p_0 + M_2 g / s$. Разность давлений уравнивается разностью уровней жидкостей в сосуде и в трубке.

$$p_0 + \frac{M_1 g}{S} + \rho g \Delta h_0 = p_0 + \frac{M_2 g}{s}.$$

Когда груз ставят на поршень П, он опускается вниз, а поршень К в трубке поднимается вверх, для сохранения объема воды в сосуде. Когда поршень П опускается на x_1 , поршень К поднимается вверх на расстояние $x_1 S / s$ относительно своего начального положения. В таком случае давление воды на поршень П увеличивается на $\rho g x_1 (S + s) / s$. Условие равновесия поршней можно записать в виде

$$p_0 + \frac{(M_1 + m)g}{S} + \rho g \Delta h_0 = p_0 + \frac{M_2 g}{s} + \rho g x_1 \frac{S + s}{s}.$$

Вычтем из этого уравнения условие равновесия поршней без груза и получим

$$\frac{mg}{S} = \rho g x_1 \frac{S + s}{s}.$$

И выражаем массу груза

$$m = \rho x_1 (S + s) \frac{S}{s}.$$

Аналогично, когда груз помещают на поршень К, давление воды на этот поршень увеличивается на $\rho g x_2 (S + s) / S$, это давление уравнивает силу тяжести груза

$$\frac{mg}{s} = \rho g x_2 \frac{S + s}{S}.$$

Сравнивая эти выражения получаем

$$x_1 \frac{S}{s} = x_2 \frac{s}{S}.$$

Выражаем отношение площадей

$$\frac{S^2}{s^2} = \frac{x_2}{x_1} = 9.$$

Откуда $S = 3s$.

Подставляем сумму и отношение площадей в уравнение для массы груза

$$m = \rho x_1 (S + s) \frac{S}{s} = \rho x_1 \frac{M}{\rho H} \frac{S}{s} = \frac{M x_1}{H} \frac{S}{s} = 0,6 \text{ кг.}$$

Ответ: масса груза равна 0,6 кг.

Задача 7. Спирограф. Заметим, что нарисованная кривая имеет форму пятиконечной звезды со скруглёнными краями. Если смотреть из центра кривой, она состоит из двух линий. Это значит, что линия замкнулась после того, как шестерёнка два раза прокрутилась внутри отверстия. Отверстие в шестерёнке смещено относительно центра. Кривая в форме пятиконечной звезды означает, что за 2 оборота шестерёнки внутри отверстия, маленькое отверстие в шестерёнке 5 раз оказывается максимально близко к краю отверстия. Таким образом, когда шестерёнка 2 раза прокатывается по 40 зубцам отверстия, сама шестерёнка проворачивается 5 раз. То есть шестерёнка имеет $2 \cdot 40 / 5 = 16$ зубцов.

Для ответа на второй вопрос рассмотрим конструкцию, в которой центр шестерёнки закреплён, а сам спирограф вращается вокруг центра отверстия. Очевидно, что в случае, когда центры шестерёнки и отверстия неподвижны, за 2 оборота спирографа шестерёнка сделает 5 оборотов вокруг своей оси. Причем спирограф и шестерёнка вращаются в одном направлении. Теперь вернёмся к случаю, когда спирограф остаётся неподвижным. Для того, чтобы вернуть спирограф, нужно всю систему повернуть на 2 оборота в обратном направлении. Значит шестерёнка сделает $5 - 2 = 3$ оборота вокруг своей оси.

Ответ: шестерёнка имеет 16 зубцов и делает 3 оборота вокруг оси когда замыкает линию.