

Задача 1. Раз, два, Ш!

Обозначим начальные уровни жидкости в коленях h_1 , h_2 и h_3 соответственно. Давления на дно во всех коленях одинаковы, следовательно (ускорение свободного падения g сокращено)

$$\begin{aligned}\rho_3 h_3 + \frac{m_3}{S_3} &= \rho_1 h_1 + \frac{m_1}{S_1}; \\ \rho_3 h_3 + \frac{m_3}{S_3} &= \rho_2 h_2 + \frac{m_2}{S_2}.\end{aligned}$$

Пусть после перестановки груза уровни жидкости в коленях изменились на x_1 , x_2 и x_3 соответственно (эти величины считаются положительными, если уровень сместился вверх, и отрицательными, если вниз). Тогда

$$\begin{aligned}\rho_3(h_3 + x_3) + \frac{m_3}{S_3} &= \rho_1(h_1 + x_1) + \frac{m_2}{S_1}; \\ \rho_3(h_3 + x_3) + \frac{m_3}{S_3} &= \rho_2(h_2 + x_2) + \frac{m_1}{S_2}.\end{aligned}$$

Если вычесть из этой пары уравнений предыдущую пару, получим

$$\rho_3 x_3 = \rho_1 x_1 + \frac{\Delta m}{S_1}; \quad (1)$$

$$\rho_3 x_3 = \rho_2 x_2 - \frac{\Delta m}{S_2}, \quad (2)$$

где $\Delta m = m_2 - m_1$. Это два уравнения на три неизвестных. В качестве третьего уравнения запишем условие сохранения суммарного объёма жидкостей,

$$x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 = 0. \quad (3)$$

Чтобы решить получившуюся систему (1)–(3), домножим уравнение (1) на S_1/ρ_1 и уравнение (2) на S_2/ρ_2 , а затем сложим их. Тогда с учётом (3) получится

$$\left(\frac{\rho_3}{\rho_1} S_1 + \frac{\rho_3}{\rho_2} S_2 + S_3 \right) x_3 = \Delta m \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Подставим сюда значения величин из условия и выразим x_3

$$x_3 = \frac{m}{18\rho S}.$$

Подставив x_3 в (1)–(2), получим

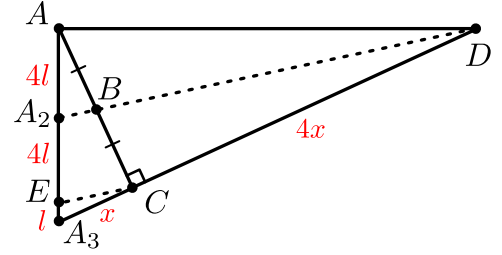
$$x_1 = -\frac{5m}{6\rho S}, \quad x_2 = \frac{m}{3\rho S}.$$

Ответ: $x_1 = -5m/(6\rho S)$, $x_2 = m/(3\rho S)$, $x_3 = m/(18\rho S)$.

Задача 2. Милетская задача

Отметим на рисунке точки A_2 и A_3 , в которых машинка была в моменты времени t_2 и t_3 соответственно. Из условия следует, что A_2, B, D лежат на одной прямой и A_3, C, D лежат на одной прямой. Пусть $t_1 = 1$ с, и $l = at_1^2/2$. Тогда имеем

$$|AA_2| = \frac{at_2^2}{2} = 4l, \quad |A_2A_3| = \frac{a(t_3^2 - t_2^2)}{2} = 5l.$$



Выберем на A_2A_3 точку E так, чтобы $CE \parallel BA_2$. По условию $|AB| = |BC|$, следовательно по теореме Фалеса

$$|AA_2| = |A_2E| = 4l \Rightarrow |EA_3| = l.$$

Обозначим $|A_3C| = x$ и воспользуемся теоремой Фалеса ещё раз:

$$|EA_3| : |A_2E| = 1 : 4 \Rightarrow |CD| = 4 \cdot |A_3C| = 4x.$$

Заметим, что AC — высота в прямоугольном треугольнике AA_3D , следовательно

$$|AC| = \sqrt{|A_3C| \cdot |CD|} = 2x \Rightarrow \tan(\angle ADC) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда сразу

$$|AA_3| = |AD| \cdot \tan(\angle ADC) = 9 \text{ м} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot |AA_3|}{t_3^2} = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $a = 2 \text{ м/с}^2$.

Задача 3. Эксперименты с тонкими проводами

Описанный в условии задачи результат эксперимента возможен, поскольку соединительные провода имеют сопротивление.

Предположим, что к идеальному источнику напряжения U_0 подключен резистор R при помощи проводов общим сопротивлением r . Согласно закону Ома, сила тока, текущего в цепи $I = U_0/(R + r)$, откуда мощность, выделяемая на резисторе, $P = I^2 R = U_0^2 R/(R + r)^2$.

Метод 1. Используем факт равенства мощностей при сопротивлениях R_1 и R_2 резисторов в цепи

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2 R_1}{(R_1 + r)^2} &= \frac{U_0^2 R_2}{(R_2 + r)^2} \Leftrightarrow R_1 (r^2 + 2R_2 r + R_2^2) = R_2 (r^2 + 2R_1 r + R_1^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (R_2 - R_1)r^2 = R_1 R_2 (R_2 - R_1) \Leftrightarrow r = \sqrt{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Здесь использовано, что $R_1 \neq R_2$. Получаем, что сопротивление двух последовательно соединённых проводов равно $\sqrt{R_1 R_2}$. Таким образом, сопротивление провода $\sqrt{R_1 R_2}/2$.

Метод 2. Посмотрим на получившееся равенство как на уравнение относительно сопротивления резистора R . Действительно,

$$R^2 + R \left(2r - \frac{U_0^2}{P} \right) + r^2 = 0.$$

По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно r^2 . Применив результат к первым двум экспериментам, получаем, что сопротивление двух последовательно соединённых проводов равно $\sqrt{R_1 R_2}$. Таким образом, сопротивление провода $\sqrt{R_1 R_2}/2$.

В третьем эксперименте Миша подключил к источнику резисторы R_1, R_2 , используя три провода общим сопротивлением $3\sqrt{R_1 R_2}/2$. Сила тока, текущего в цепи,

$$I' = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2}.$$

Поэтому на резисторах выделяются мощности

$$P_1 = I'^2 R_1 = \frac{U_0^2 R_1}{(R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2)^2} = 30 \text{ мВт}, \quad P_2 = I'^2 R_2 = \frac{U_0^2 R_2}{(R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2)^2} = 120 \text{ мВт}.$$

Ответ: $P_1 = 30 \text{ мВт}, P_2 = 120 \text{ мВт}$.

Задача 4. Чай с молоком

1. Сначала определим, как связана скорость изменения температуры термocupки с коэффициентом теплоотдачи α . Для этого запишем закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} \Delta Q + P_{\text{пот}} \Delta \tau = 0, \\ P_{\text{пот}} = \alpha \cdot (t - t_0), \\ \Delta Q = C \Delta t. \end{cases}$$

Здесь Δt — изменение температуры жидкости за промежуток времени $\Delta \tau$, $C = \sum m_i c_i$ — полная теплоёмкость содержимого термocupки.

Отсюда α выражается через скорость изменения температуры $v(t) = \Delta t / \Delta \tau$ как

$$\alpha = C \frac{-v(t)}{t - t_0} = C \left| \frac{v(t)}{t - t_0} \right|.$$

2. Подставляя $C_1 = m_1 c_1$ для чая и $C_2 = m_2 c_2$ для молока, вычисляем коэффициенты теплоотдачи напитков:

$$\alpha_1 = 0,560 \text{ Вт/}^\circ\text{C} \text{ и } \alpha_2 \approx 0,486 \text{ Вт/}^\circ\text{C}.$$

3. Из линейности коэффициента теплоотдачи для смеси напитков имеем

$$\alpha_3 = \frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2} \approx 0,545 \text{ Вт/}^\circ\text{C}.$$

4. Запишем уравнение теплового баланса, чтобы определить температуру смеси напитков:

$$m_1 c_1 (t_3 - t_1) + m_2 c_2 (t_3 - t_2) = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{C_3} \approx 84,0 \text{ }^\circ\text{C},$$

где $C_3 = m_1 c_1 + m_2 c_2$ — теплоёмкость смеси напитков.

5. Определим искомую скорость остывания

$$v_3(t_3) = \alpha_3 \frac{t_3 - t_0}{C_3} \approx 0,0317 \text{ }^\circ\text{C/с}$$

Ответ: $\alpha_1 = 0,560 \text{ Вт/}^\circ\text{C}, \alpha_2 \approx 0,486 \text{ Вт/}^\circ\text{C}, v_3(t_3) \approx 0,0317 \text{ }^\circ\text{C/с}$.

Задача 5. Road to...

Пусть n — общая концентрация автомобилей, то есть их среднее количество на единицу длины дороги. Перейдем в систему отсчёта физиков. За промежуток времени Δt они встретят $n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t$ автомобилей, движущихся с относительной скоростью u , если их доля в общем числе автомобилей из потока — $p(u)$.

Причём записанное выражение оказывается верным для любой категории автомобилей: и для движущихся быстрее, и для едущих медленнее физиков.

Соответственно, равенство числа обгоняющих и обгоняемых автомобилей можно записать в виде:

$$\sum_{u>0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t = \sum_{u<0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t. \quad (4)$$

Или, что то же самое:

$$\sum n \cdot u \cdot p(u) \cdot \Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i u_i p_i = 0. \quad (5)$$

Поскольку $u = v_i - v$ (v — скорость физиков, v_i — скорость i -го вида автомобилистов), правое выражение (5) примет вид:

$$\sum_i v_i p_i = v \sum_i p_i = v.$$

Отсюда $v = 0,3 \cdot 100 \text{ км/ч} + 0,5 \cdot 90 \text{ км/ч} + 0,2 \cdot 60 \text{ км/ч} = 87 \text{ км/ч}$.

Для ответа на второй вопрос задачи вместо условия (4) запишем

$$\sum_{u>0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t = 2 \sum_{u<0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t.$$

Заметим, что раз обгоняющих стало вдвое больше, чем обгоняемых, скорость физиков уменьшилась. А значит все родители и путешественники точно обгоняют Глюка и Бага. Тогда, выражая скорость физиков, получаем ответ

$$v = \frac{v_1 p_1 + v_2 p_2 + 2v_3 p_3}{p_1 + p_2 + 2p_3} = 82,5 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 1) $v = 87 \text{ км/ч}$, 2) $v = 82,5 \text{ км/ч}$.

Задача 1. Раз, два, Ш!

Обозначим начальные уровни жидкости в коленях h_1 , h_2 и h_4 соответственно. Давления на дно во всех коленях одинаковы, следовательно (ускорение свободного падения g сокращено)

$$\begin{aligned}\rho_4 h_4 + \frac{m_4}{S_4} &= \rho_1 h_1 + \frac{m_1}{S_1}; \\ \rho_4 h_4 + \frac{m_4}{S_4} &= \rho_2 h_2 + \frac{m_2}{S_2}.\end{aligned}$$

Пусть после перестановки груза уровни жидкости в коленях изменились на x_1 , x_2 и x_4 соответственно (эти величины считаются положительными, если уровень сместился вверх, и отрицательными, если вниз). Тогда

$$\begin{aligned}\rho_4(h_4 + x_4) + \frac{m_4}{S_4} &= \rho_1(h_1 + x_1) + \frac{m_2}{S_1}; \\ \rho_4(h_4 + x_4) + \frac{m_4}{S_4} &= \rho_2(h_2 + x_2) + \frac{m_1}{S_2}.\end{aligned}$$

Если вычесть из этой пары уравнений предыдущую пару, получим

$$\rho_4 x_4 = \rho_1 x_1 + \frac{\Delta m}{S_1}; \quad (6)$$

$$\rho_4 x_4 = \rho_2 x_2 - \frac{\Delta m}{S_2}, \quad (7)$$

где $\Delta m = m_2 - m_1$. Это два уравнения на три неизвестных. В качестве третьего уравнения запишем условие сохранения суммарного объёма жидкостей,

$$x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_4 S_4 = 0. \quad (8)$$

Чтобы решить получившуюся систему (6)–(8), домножим уравнение (6) на S_1/ρ_1 и уравнение (7) на S_2/ρ_2 , а затем сложим их. Тогда с учётом (8) получится

$$\left(\frac{\rho_4}{\rho_1} S_1 + \frac{\rho_4}{\rho_2} S_2 + S_4 \right) x_4 = \Delta m \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Подставим сюда значения величин из условия и выразим x_4

$$x_4 = \frac{m}{24\rho S}.$$

Подставив x_4 в (6)–(7), получим

$$x_1 = -\frac{5m}{6\rho S}, \quad x_2 = \frac{m}{3\rho S}.$$

Ответ: $x_1 = -5m/(6\rho S)$, $x_2 = m/(3\rho S)$, $x_4 = m/(24\rho S)$.

Задача 2. Милетская задача

Отметим на рисунке точки A_2 и A_3 , в которых машинка была в моменты времени t_2 и t_3 соответственно. Из условия следует, что A_2, B, D лежат на одной прямой и A_3, C, D лежат на одной прямой. Пусть $t_1 = 1$ с, и $l = at_1^2/2$. Тогда имеем

$$|AA_2| = \frac{at_2^2}{2} = 4l, \quad |A_2A_3| = \frac{a(t_3^2 - t_2^2)}{2} = 5l.$$

Выберем на A_2A_3 точку E так, чтобы $CE \parallel BA_2$. По условию $|AB| = |BC|$, следовательно по теореме Фалеса

$$|AA_2| = |A_2E| = 4l \Rightarrow |EA_3| = l.$$

Обозначим $|A_3C| = x$ и воспользуемся теоремой Фалеса ещё раз:

$$|EA_3| : |A_2E| = 1 : 4 \Rightarrow |CD| = 4 \cdot |A_3C| = 4x.$$

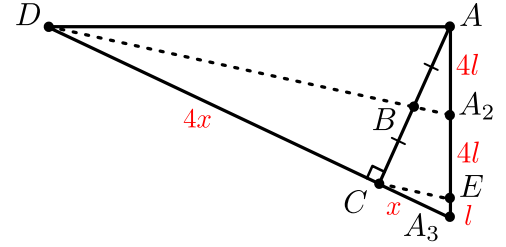
Заметим, что AC — высота в прямоугольном треугольнике AA_3D , следовательно

$$|AC| = \sqrt{|A_3C| \cdot |CD|} = 2x \Rightarrow \tan(\angle ADC) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда сразу

$$|AA_3| = |AD| \cdot \tan(\angle ADC) = 18 \text{ м} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot |AA_3|}{t_3^2} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $a = 4 \text{ м/с}^2$.



Задача 3. Эксперименты с тонкими проводами

Описанный в условии задачи результат эксперимента возможен, поскольку соединительные провода имеют сопротивление.

Предположим, что к идеальному источнику напряжения U_0 подключен резистор R при помощи проводов общим сопротивлением r . Согласно закону Ома, сила тока, текущего в цепи $I = U_0/(R + r)$, откуда мощность, выделяемая на резисторе, $P = I^2 R = U_0^2 R / (R + r)^2$. Посмотрим на получившееся равенство как на уравнение относительно сопротивления резистора R . Действительно,

$$R^2 + R \left(2r - \frac{U_0^2}{P} \right) + r^2 = 0.$$

Метод 1. Используем факт равенства мощностей при сопротивлениях R_1 и R_2 резисторов в цепи

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2 R_1}{(R_1 + r)^2} &= \frac{U_0^2 R_2}{(R_2 + r)^2} \Leftrightarrow R_1 (r^2 + 2R_2 r + R_2^2) = R_2 (r^2 + 2R_1 r + R_1^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (R_2 - R_1)r^2 = R_1 R_2 (R_2 - R_1) \Leftrightarrow r = \sqrt{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Здесь использовано, что $R_1 \neq R_2$. Получаем, что сопротивление двух последовательно соединённых проводов равно $\sqrt{R_1 R_2}$. Таким образом, сопротивление провода $\sqrt{R_1 R_2}/2$.

Метод 2. Посмотрим на получившееся равенство как на уравнение относительно сопротивления резистора R . Действительно,

$$R^2 + R \left(2r - \frac{U_0^2}{P} \right) + r^2 = 0.$$

По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно r^2 . Применив результат к первым двум экспериментам, получаем, что сопротивление двух последовательно соединённых проводов равно $\sqrt{R_1 R_2}$. Таким образом, сопротивление провода $\sqrt{R_1 R_2}/2$.

По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно r^2 . Применив результат к первым двум экспериментам, получаем, что сопротивление двух последовательно соединённых проводов равно $\sqrt{R_1 R_2}$. Таким образом, сопротивление провода $\sqrt{R_1 R_2}/2$.

В третьем эксперименте Миша подключил к источнику резисторы R_1, R_2 , используя три провода общим сопротивлением $3\sqrt{R_1 R_2}/2$. Сила тока, текущего в цепи,

$$I' = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2}.$$

Поэтому на резисторах выделяются мощности

$$P_1 = I'^2 R_1 = \frac{U_0^2 R_1}{(R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2)^2} = 20 \text{ мВт}, \quad P_2 = I'^2 R_2 = \frac{U_0^2 R_2}{(R_1 + R_2 + 3\sqrt{R_1 R_2}/2)^2} = 80 \text{ мВт}.$$

Ответ: $P_1 = 20 \text{ мВт}$, $P_2 = 80 \text{ мВт}$.

Задача 4. Чай с молоком

1. Сначала определим, как связана скорость изменения температуры термocupки с коэффициентом теплоотдачи α . Для этого запишем закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} \Delta Q + P_{\text{пот}} \Delta \tau = 0, \\ P_{\text{пот}} = \alpha \cdot (t - t_0), \\ \Delta Q = C \Delta t. \end{cases}$$

Здесь Δt — изменение температуры жидкости за промежуток времени $\Delta \tau$, $C = \sum m_i c_i$ — полная теплоёмкость содержимого термocupки.

Отсюда α выражается через скорость изменения температуры $v(t) = \Delta t / \Delta \tau$ как

$$\alpha = C \frac{-v(t)}{t - t_0} = C \left| \frac{v(t)}{t - t_0} \right|.$$

2. Подставляя $C_1 = m_1 c_1$ для чая и $C_2 = m_2 c_2$ для молока, вычисляем коэффициенты теплоотдачи напитков:

$$\alpha_1 = 0,672 \text{ Вт/}^\circ\text{С и } \alpha_2 \approx 0,507 \text{ Вт/}^\circ\text{С}.$$

3. Из линейности коэффициента теплоотдачи для смеси напитков имеем

$$\alpha_3 = \frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2} \approx 0,620 \text{ Вт/}^\circ\text{С}.$$

4. Запишем уравнение теплового баланса, чтобы определить температуру смеси напитков:

$$m_1 c_1 (t_3 - t_1) + m_2 c_2 (t_3 - t_2) = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{C_3} \approx 85,8^\circ \text{C},$$

где $C_3 = m_1 c_1 + m_2 c_2$ — теплоёмкость смеси напитков.

5. Определим искомую скорость остывания

$$v_3(t_3) = \alpha_3 \frac{t_3 - t_0}{C_3} \approx 0,0268^\circ \text{C}/\text{с}$$

Ответ: $\alpha_1 = 0,672 \text{ Вт}/^\circ \text{C}$, $\alpha_2 \approx 0,507 \text{ Вт}/^\circ \text{C}$, $v_3(t_3) \approx 0,0268^\circ \text{C}/\text{с}$.

Задача 5. Road to...

Пусть n — общая концентрация автомобилей, то есть их среднее количество на единицу длины дороги. Перейдем в систему отсчёта физиков. За промежуток времени Δt они встретят $n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t$ автомобилей, движущихся с относительной скоростью u , если их доля в общем числе автомобилей из потока — $p(u)$.

Причём записанное выражение оказывается верным для любой категории автомобилей: и для движущихся быстрее, и для едущих медленнее физиков.

Соответственно, равенство числа обгоняющих и обгоняемых автомобилей можно записать в виде:

$$\sum_{u>0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t = \sum_{u<0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t. \quad (9)$$

Или, что то же самое:

$$\sum n \cdot u \cdot p(u) \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow \sum_i u_i p_i = 0. \quad (10)$$

Поскольку $u = v_i - v$ (v — скорость физиков, v_i — скорость i -го вида автомобилистов), правое выражение (10) примет вид:

$$\sum_i v_i p_i = v \sum_i p_i = v.$$

Отсюда $v = 0,6 \cdot 100 \text{ км/ч} + 0,3 \cdot 90 \text{ км/ч} + 0,1 \cdot 60 \text{ км/ч} = 93 \text{ км/ч}$.

Во втором вопросе задачи обгоняемых стало вдвое больше, чем обгоняющих, а потому вместо условия (9) имеем

$$2 \sum_{u>0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t = \sum_{u<0} n \cdot |u| \cdot p(u) \cdot \Delta t.$$

При этом скорость физиков во втором вопросе должна получиться ещё выше, чем в первом. А потому теперь путешественники и дачники заведомо будут отстающими:

$$v = \frac{2v_1 p_1 + v_2 p_2 + v_3 p_3}{2p_1 + p_2 + p_3} \approx 95,6 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 1) $v = 93 \text{ км/ч}$, 2) $v \approx 95,6 \text{ км/ч}$.