

Задача 1. Реактивный рюкзак**Авторское решение (Александр Гаврилов).**

Рассмотрим общий случай. Пусть проекции ускорения участника на горизонтальную (Ox) и вертикальную (Oy) оси a_x и a_y соответственно. Выберем в качестве начала координат точку старта, тогда

$$Oy: y = v_0 t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad (1)$$

$$Ox: x = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (2)$$

В конце полёта $y = 0$, следовательно

$$v_0 = -\frac{a_y t_{\text{полёта}}}{2}. \quad (3)$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_x - a_y}}. \quad (4)$$

Для первого участника имеем

$$a_x = g \cos 60^\circ = \frac{g}{2}, \quad a_y = -g + g \sin 60^\circ = -g \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (5)$$

После подстановки в формулу (4)

$$t_1 = \sqrt{\frac{4L}{(3 - \sqrt{3})g}} \approx 1,776 \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим движение второго участника. Ранец способен создавать ускорение только под углами более 60° к горизонту. Следовательно,

$$\frac{\Delta a_x}{\Delta a_y} = \operatorname{ctg} \alpha < 1. \quad (7)$$

Таким образом, любое включение ранца приведет к увеличению времени полета, поскольку разность $a_x - a_y$ уменьшится. Значит, самым правильным решением в данном случае будет вовсе не включать ранец. Тогда время полета второго участника

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g}}. \quad (8)$$

Итоговый отрыв получается вычитанием из начального отрыва разности времен полета

$$\tau' = \tau + t_2 - t_1. \quad (9)$$

Ответ: $\tau' = \tau + \sqrt{\frac{2L}{g}} - \sqrt{\frac{4L}{(3 - \sqrt{3})g}}.$

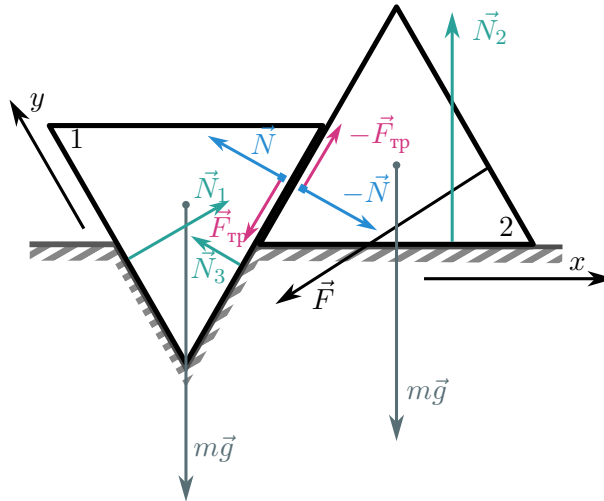
Примечание. Это выражение может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от того, кто из участников оказался впереди.

Задача 2. Клин клином

Авторское решение (Антон Трубицын).

Минимальное значение силы удовлетворяет тому условию, что при небольшом ее увеличении система выйдет из равновесия. Поскольку по условию смещение призмы только поступательное (т. е. не происходит проворота), для решения задачи достаточно записать первое условие равновесия в граничном случае для каждой из призм.

Расставим силы, которые действуют на каждое из тел (см. рис.).



Отметим несколько важных идей:

1) Точки приложения сил нормальной реакции N_i не известны, их можно найти, записав правило моментов для каждого из тел и решив получившуюся систему. Если она не будет иметь решений (точки приложения сил не лежат на границе контакта), то призмы начнут проворачиваться. Однако в рамках данной задачи такой анализ не требуется.

2) В момент начала смещения первая призма перестает контактировать с правой стенкой паза, поэтому сила, действующая со стороны правой стенки на первую призму $N_3 = 0$.

3) Согласно третьему закону Ньютона, силы нормальной реакции N и трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, с которыми призмы действуют друг на друга, равны по модулю и противоположны по направлению.

Введём Ox , направленную горизонтально, и ось Oy , параллельную левой стенке паза. Такой выбор осей позволит не находить значения реакционных сил N_1 и N_2 , уменьшив тем самым количество уравнений, необходимых для решения задачи. Запишем равенство равнодействующей силы нулю, действующей на каждую из призм, в проекциях на Ox и Oy .

$$\begin{cases} Oy: & N \cos 30^\circ - mg \cos 30^\circ - F_{\text{тр}} \cos 60^\circ = 0 & \text{— первая призма,} \\ Ox: & F_{\text{тр}} \cos 60^\circ + N \sin 60^\circ - F \cos 30^\circ = 0 & \text{— вторая.} \end{cases}$$

Здесь учтено, что угол между любой из сил и осями составляет либо 30° , либо 60° .

Подставим $F_{\text{тр}} = \mu N$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ и решим систему относительно F

$$\begin{cases} N \sin 60^\circ - \mu N \cos 60^\circ = mg \sin 60^\circ, \\ F \sin 60^\circ = \mu N \cos 60^\circ + N \sin 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = \frac{\text{tg } 60^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \mu} mg, \\ F = (\mu \text{ctg } 60^\circ + 1)N. \end{cases}$$

Откуда получаем окончательный ответ

$$F = \frac{\mu + \text{tg } 60^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \mu} mg.$$

Из вида формулы ясно, что таким образом возможно сдвинуть призму, находящуюся в пазу, только при $\mu < \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,7$.

Ответ: $F = \frac{\mu + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu} mg, \quad \mu < \sqrt{3}.$

Задача 3. Паровоз в Щербинке

Авторское решение (Павел Макаров).

1. Полезная мощность паровоза есть работа, которую он производит в единицу времени

$$P_{\text{вых}} = \frac{F \cdot dS}{dt} = F \cdot v = \beta v^2.$$

Обозначим быстроту потребления угля и его теплоту сгорания как μ и λ соответственно. Тогда, из закона изменения энергии,

$$P_{\text{вых}}\tau + P_{\text{пот}}\tau = \lambda(\mu \cdot \tau).$$

Если поезд проехал N кругов, он заправился $N - 1$ раз, следовательно, потратил $1,5 m_0 + (N - 1)m_0$ угля.

$$v^2\beta\tau - (N + 0,5)\lambda m_0 + P_{\text{пот}}\tau = 0$$

Отсюда, заменив N на $v\tau/S_0$, можно выразить v

$$v = \frac{\tau\lambda m_0 \pm \sqrt{(\tau\lambda m_0)^2 + 4\tau\beta S_0^2(0,5\lambda m_0 - P_{\text{пот}}\tau)}}{2\tau\beta S_0}.$$

По условию, первые два испытания заняли приблизительно одно и то же время, но скорости в них различались, следовательно, скорости v_1 и v_2 , которые поезд развивал в понедельник, есть решения одного и того же квадратного уравнения, которые можно найти по формуле выше. Тогда¹

$$v_1 + v_2 = \frac{\tau\lambda m_0 + \tau\lambda m_0}{2\tau\beta S_0} = \frac{\lambda m_0}{\beta S_0} \Rightarrow v_{\text{ср}} = \frac{v_1\tau + v_2\tau}{\tau + \tau} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\lambda m_0}{2\beta S_0}.$$

Таким образом,

$$m_0 = \frac{2\beta S_0 v_{\text{ср}}}{\lambda} = 77,86 \text{ кг.}$$

2. Чтобы найти $P_{\text{пот}}$, заменим в квадратном уравнении скорость на NS_0/τ

$$P_{\text{пот}}\tau^2 - (N + 0,5)\tau\lambda m_0 + N^2\beta S_0^2 = 0.$$

Поскольку во вторник $N_1 = N_2 = N$, аналогично предыдущему пункту получаем

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{(N + 0,5)\lambda m_0}{P_{\text{пот}}} \Rightarrow P_{\text{пот}} = \frac{(N + 0,5)\lambda m_0}{(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Сумма времён известна, следовательно, $P_{\text{пот}} = 799,25$ кВт.

3. Для ответа на третий вопрос задачи заменим в уравнении τ на NS_0/v и получим, что

$$N = \frac{0,5 v \lambda m_0}{v^2 \beta S_0 - v \lambda m_0 + P_{\text{пот}} S_0} = 13,009 \simeq 13 \text{ кругов.}$$

Тогда $S = 6 \text{ км} \cdot 13 = 78 \text{ км.}$

Ответ: 1. $m_0 = \frac{2\beta S_0 v_{\text{ср}}}{\lambda} = 77,86 \text{ кг.}$

2. $P_{\text{пот}} = \frac{(N + 0,5)\lambda m_0}{(\tau_1 + \tau_2)} = 799,25 \text{ кВт.}$

3. $S = S_0 \cdot \frac{0,5 v \lambda m_0}{v^2 \beta S_0 - v \lambda m_0 + P_{\text{пот}} S_0} = 78 \text{ км.}$

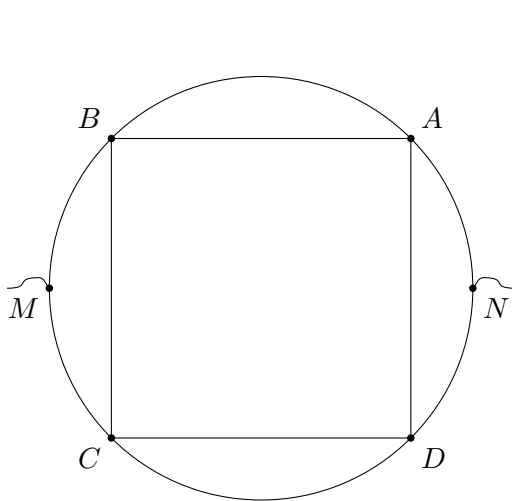
¹Тот же самый результат можно получить, воспользовавшись теоремой Виета для составленного квадратного уравнения.

Задача 4. Квадратура круга

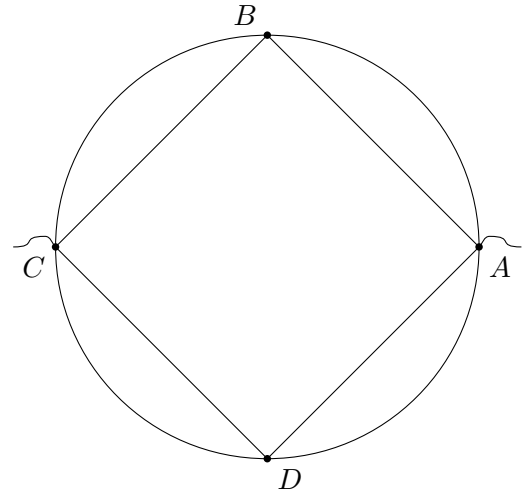
Авторское решение (Иван Гурьянов).

Если $\varphi = 45^\circ$, то схема принимает вид, представленный на рисунке 1а. Из соображений симметрии можно заключить, что по сторонам квадрата BC и AD ток не течёт. Следовательно, имеем параллельное соединение двух одинаковых участков: $MBAN$ и $MCDN$. Участок $MBAN$, в свою очередь, есть последовательное соединение трёх: MB , AB и AN . Наконец, участок AB состоит из двух параллельно соединённых проволок: четверти окружности радиусом a и стороны квадрата длиной $a\sqrt{2}$. Таким образом,

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot (R_{MB} + R_{AB} + R_{AN}) = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{\pi a}{4} + \frac{a\sqrt{2} \cdot 2\pi a/4}{a\sqrt{2} + 2\pi a/4} + \frac{\pi a}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2} + \pi}{2\sqrt{2} + \pi} \cdot a\lambda \approx 1,157a\lambda.$$



(a) $\varphi = 45^\circ$



(b) $\varphi = 0^\circ$, M совпадает с C и N совпадает с A

Рис. 1 – Вид схемы в зависимости от угла φ

Если $\varphi = 0^\circ$, то схема принимает вид, представленный на рисунке 1b. Точка M совпадает с точкой C , а точка N – с точкой A . Имеем параллельное соединение двух одинаковых участков: CBA и CDA . Участок CBA , в свою очередь, есть последовательное соединение двух одинаковых: CB и BA . Сопротивление участка BA рассчитывается аналогично тому, как это было сделано выше. Таким образом,

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot R_{AB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2\pi a/4}{a\sqrt{2} + 2\pi a/4} \cdot \lambda = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \pi} \cdot a\lambda \approx 0,744a\lambda.$$

Поскольку изменения сопротивления от $R_{\min}$ до $R_{\max}$ и обратно монотонны, и за полный оборот максимальное сопротивление достигается ровно четыре раза, минимальное сопротивление при $\varphi \in [0; 360)$ тоже достигается четырежды. Пусть $R(\varphi)$ – сопротивление между M и N при некотором φ . Ясно, что $R(\varphi) = R(\varphi + 90^\circ)$ и $R(\varphi) = R(-\varphi)$. С учётом описанной в условии монотонности, отсюда следует, что R_2 – либо минимум, либо максимум. Поскольку $R_2 < R_1$, имеем

$$R_{\min} = R_2.$$

Из соображений симметрии также ясно, что $R(45^\circ - \Delta\varphi) = R(45^\circ + \Delta\varphi)$ при $\Delta\varphi < 45^\circ$. Следовательно (здесь снова нужно учесть описанную в условии монотонность),

$$R_{\max} = R_1.$$

Ответ:

1. $R_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2} + \pi}{2\sqrt{2} + \pi} \cdot a\lambda \approx 1,157a\lambda.$
2. $R_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \pi} \cdot a\lambda \approx 0,744a\lambda.$
3. $R_{\min} = R_2, R_{\max} = R_1.$

Задача 5. Под дождём

Авторское решение (Константин Родионенко).

Рассмотрим сосуд с водой и кусочек льда как одну систему тел. Внешние силы, которые на неё действуют, это сила тяжести и сила нормальной реакции опоры со стороны весов. В каждый момент времени система находится в *механическом* равновесии (в условии отмечена «быстрота» установления равновесия и указание пренебречь динамическим давлением капель), поэтому сила нормальной реакции опоры со стороны весов равна силе тяжести, действующей на рассматриваемую систему тел.

Таким образом, изменение показаний весов связано исключительно с тем, что меняется масса содержащего сосуда. Факт плавления льда на показания весов не влияет.

Масса кусочка льда с гранитным осколком $m = m_1 - m_0 = 34$ г.

Определим, какое количество дождя (в единицах длины) выпало за время $\tau_1/3$ и за всё время τ_2 . Для этого посчитаем площадь под графиком интенсивности дождя от времени в интересующем диапазоне. Итак,

$$h_2 = 6q_0\tau_0, \quad h_3 = 36q_0\tau_0,$$

где $q_0 = 1$ мм/ч, $\tau_0 = 1$ мин.

Считая площадь сечения сосуда постоянной (или достаточно слабо меняющейся, ведь $h_1 < h_2 = 0,6$ мм — малая величина по сравнению с высотой любого разумного сосуда с водой), получаем

$$\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} = \frac{h_3}{h_2} = 6 \Rightarrow m_3 = 6m_2 - 5m_1 = 421 \text{ г.}$$

Ответ:

1. $m = m_1 - m_0 = 34$ г.
2. $m_3 = 6m_2 - 5m_1 = 421$ г.