

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**Максимальная сумма баллов – 100.**

**Задача 1. Бельчонок идет в школу (15 баллов)**

Все лесные жители любят Бельчонка и готовы угощать его орешками, когда он каждый день идет в школу на другой конец леса. От дома Бельчонка до школы ведут три разных тропинки – одна мимо дома розовой феи, другая мимо дома сиреневой феи, а третья мимо дома голубой феи. Бельчонок знает, что розовая фея всегда подарит ему 70 орешков, сиреневая фея 50 орешков, а голубая 30 орешков.

На первый взгляд выбор Бельчонка, по какой тропинке идти в школу, очевиден, но когда он идет через лес от дома сиреневой феи, то с вероятностью 60% может встретить Лешего, который тоже всегда готов угостить Бельчонка орешками. Если у Лешего в этот момент хорошее настроение, то он насыпает ему 60 орешков, а если настроение не очень, то только 10 орешков. И Бельчонок по опыту знает, что, в 8 случаях из 10 у веселого Лешего настроение бывает хорошим.

Если же идти в школу по тропинке мимо дома голубой феи, то с вероятностью 30% можно встретить деловую Кикимору, которая отличается особой щедростью и всегда дарит Бельчонку пакетик со 150-ю орешками.

**(а)** Укажите, по какой дороге предпочитает ходить рациональный Бельчонок в школу, и дайте обоснование своему выводу.

**(б)** Мама Бельчонка хочет мотивировать его изменить традиционный маршрут дороги в школу, чтобы он, руководствуясь личной выгодой, ежедневно по пути заходил к одной из фей, с которой у нее есть совместный бизнес. Поэтому она решила выдавать ежедневно  $X$  орешков Бельчонку, если он будет выбирать дорогу в школу мимо дома этой феи ( $X$  – целое число). Обоснуйте, какие минимальные значения  $X$  мудрая мама Бельчонка должна установить, чтобы добиться желаемого результата.

**Решение**

А) Бельчонку следует ориентироваться на среднеожидаемый дневной доход. В данном случае – это количество орешков, которое может получить Бельчонок в среднем за день по дороге в школу.

Если Бельчонок пойдет по тропинке мимо дома **розовой феи**, то его доход составит **70 орешков**.

Если Бельчонок пойдет по тропинке мимо дома **сиреневой феи**, то его среднеожидаемый дневной доход составит:  $50 + 0,6 \cdot (0,8 \cdot 60 + 0,2 \cdot 10) = 80$  орешков.

Если Бельчонок пойдет по тропинке мимо дома **голубой феи**, то его среднеожидаемый дневной доход составит:  $30 + 0,3 \cdot 150 = 75$  орешков.

Так как Бельчонок ходит в школу каждый день, то ему выгодно ориентироваться на максимальный среднеожидаемый дневной доход, который равен **80 орешкам**, а значит **выгоднее всего идти в школу мимо дома сиреневой феи**.

Б) Если у мамы совместный бизнес с **розовой феей**, и она хочет, чтобы Бельчонок выбрал тропинку мимо ее дома, то она должна предложить Бельчонку **больше**  $(80 - 70) = 10$  орешков. Минимальное число большее 10-ти – это 11, т.е. **надо выдавать Бельчонку 11 орешков**, чтобы он сам выбрал дорогу мимо дома розовой феи.

Если у мамы совместный **бизнес с голубой феей**, и она хочет, чтобы Бельчонок выбрал тропинку мимо ее дома, то она должна предложить Бельчонку **больше**  $(80-75) = 5$  **орешков**. Минимальное число большее 5-ти – это 6, т.е. **надо выдавать Бельчонку 6 орешков**, чтобы он сам выбрал дорогу мимо дома голубой феи.

Комментарий к задаче: для удобства решения задачи можно построить дерево решений.

### Критерии (15 баллов)

А)	Вывод о том, что надо ориентироваться на среднеожидаемый дневной доход	2 балла
	Расчет среднеожидаемого дневного дохода	$(2+4+3)=9$ баллов
Б)	Расчет величины $X$ для 2-х вариантов с обоснованием	$2+2=4$ балла (если обоснование недостаточное, то штраф 2 балла)

### Задача 2. КПВ и санкции (20 баллов)

В некоторой стране Альфа производятся два продукта  $X$  и  $Y$  (в тыс. тонн). Кривая производственных возможностей задается уравнением  $Y = 115 - 0.2X - 0.02X^2$ . Продукты  $X$  и  $Y$  потребляются жителями страны Альфа в пропорции 5 к 3.

(а) Страна Альфа участвует в мировой торговле. Для торговли используется мировая валюта – тугрики. На мировом рынке сложились следующие цены:  $P_X = 42$  тугрика за 1 тыс. тонн товара  $X$  и  $P_Y = 70$  тугриков за 1 тыс. тонн товара  $Y$ . Определите, сколько и какого товара страна Альфа будет производить, ввозить, вывозить, потреблять.

(б) Все страны, участвующие в мировой торговле, договорились об установлении потолка цены на экспортируемый страной Альфа товар в размере 10 тугриков за 1 тыс. тонн: то есть у страны Альфа этот товар будут закупать по установленной цене, но, если страна Альфа будет этот товар импортировать, то ей будут его продавать по мировой рыночной цене. Сколько и какого товара страна Альфа будет производить, ввозить, вывозить, потреблять в данной ситуации?

(в) Страна Бета, нарушая договоренности, готова приобретать для внутреннего потребления любое количество, экспортируемого страной Альфа товара по цене 30 тугриков за 1 тыс. тонн (на мировом рынке так много продавцов и покупателей, что это решение страны Бета не меняет рыночные цены). Как это решение страны Бета повлияло на объемы производства, вывоза, ввоза и потребления товаров в стране Альфа?

(г) Опасаясь санкций за нарушение договоренности, страна Бета решила закупать у страны Альфа не более 17,5 тыс. тонн товара. Сколько и какого товара теперь страна Альфа будет производить, ввозить, вывозить, потреблять?

### Решение:

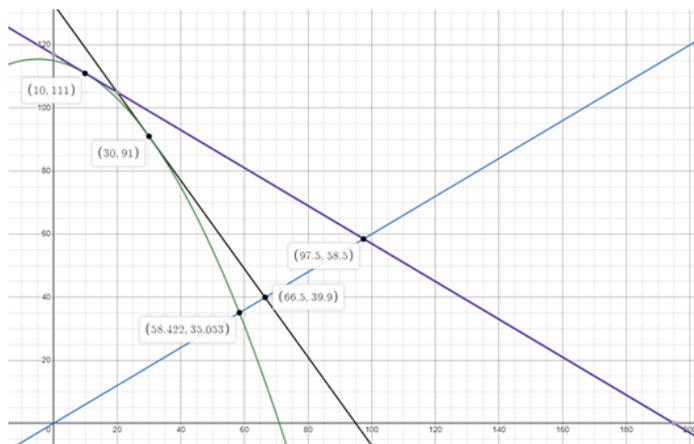


Рисунок к задаче:

(а) Объемы производства товаров  $X$  и  $Y$  определяются исходя из наклона линии цен: именно под этим углом должна проходить касательная к КПВ, координаты точки касания и есть объемы производства.

Наклон касательной к КПВ в некоторой точке  $X$  равен:

$$Y' = -0.2 - 0.04X = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{42}{70} = -0.6$$

Отсюда  $X = 10$  – объем производства товара  $X$  равен 10 тыс. тонн.

Объем производства товара  $Y$  определяем из КПВ:

$$Y = 115 - 0.2 * 10 - 0.02 * 100 = 111 \text{ тыс. тонн}$$

Для определения остальных искомым значений нужно найти уравнение касательной:  $Y = kX + b = -\frac{P_X}{P_Y}X + b$

$$\text{Осталось найти } b: 111 = -0.6 * 10 + b, b = 117$$

$$\text{Получили } Y = -0.6X + 117$$

Объемы потребления вычисляем как точку пересечения уравнения касательной и линии, характеризующей пропорцию потребления товаров жителями Альфы: исходя из условия, уравнение для линии пропорции потребления получается  $\frac{Y}{3} = \frac{X}{5}$  или  $Y = 0.6X$

Далее,  $-0.6X + 117 = 0.6X$ ,  $1.2X = 117$  или  $X = 97.5$  тыс. тонн,  $Y = 0.6X = 58.5$  тыс. тонн

Поскольку объем производства товара  $X$  меньше ( $10 < 97,5$ ), то страна Альфа будет импортировать этот товар в размере 87,5 тыс. тонн.

Товар  $Y$  будет экспортироваться в размере  $111 - 58,5 = 52,5$  тыс. тонн.

**(б)** Поскольку экспортируемым оказался товар  $Y$ , то страна Альфа может его экспортировать только по цене 10 тугриков за тыс. тонн. Эта ситуация может привести к изменению специализации страны (но тогда и новый экспортируемый товар будет поставляться на мировой рынок по цене 10), или даже к ее отказу от участия в мировой торговле.

Анализ этой ситуации может быть таким:

### Способ 1:

Ведение потолка цен на товар  $Y$  приводит к изменению наклона касательной: по модулю он вырос с  $42/70 = 0,6$  до  $42/10 = 4,2$ .

Возможное изменение специализации зависит от наклона касательной к КПВ в точке пересечения КПВ и линии пропорции:

- сама точка (это производство и потребление страны Альфа в автаркии):

$$Y = 115 - 0.2X - 0.02X^2 = 0.6X$$

$$\text{Отсюда, } 115 - 0.8X - 0.02X^2 = 0 \text{ и } X_{1,2} = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.8^2 + 4 * 0.02 * 115}}{2 * (-0.02)}$$

$$\text{Нам подойдет только положительный } X: X = \frac{\sqrt{9.84} - 0.8}{0.04} \approx 58.422 \text{ тыс. тонн}$$

Тогда  $Y$  равен  $Y = 0.6X = 0.6 * 58.42 = 35.053$  тыс. тонн- наклон касательной равен

$$Y' = -0.2 - 0.04 \frac{\sqrt{9.84} - 0.8}{0.04} = 0.6 - \sqrt{9.84} \approx 0.6 - 3.14 = -2.54$$

Поскольку новый наклон по модулю больше 2,54, то в новой ситуации страна должна была бы поменять специализацию: экспортировать  $X$ , на который не были наложены санкции, а закупать  $Y$ . Но с другой стороны в соответствии с условием закупать  $Y$  придется по рыночной цене 70 тугриков, при которой его закупать не выгодно. Поэтому в текущих условиях страна перестанет торговать с миром, будет производить и потреблять только свои товары.

**Способ 2:** это полный расчет всех точек для ситуаций: когда специализация сохранилась – экспортируем  $Y$ , и когда специализация изменилась – страна стала экспортировать  $X$ .

1) Если специализация сохранилась:

Пусть  $X$  и  $Y$  – объемы производства соответствующих товаров. Между ними соотношение:  $Y = 115 - 0.2X - 0.02X^2$

Пусть  $Im$  – весь импорт товара  $X$ ,  $Ex$  – весь экспорт товара  $Y$ , тогда  $42 * Im = 10 * Ex$  или  $Ex = 4.2 * Im$

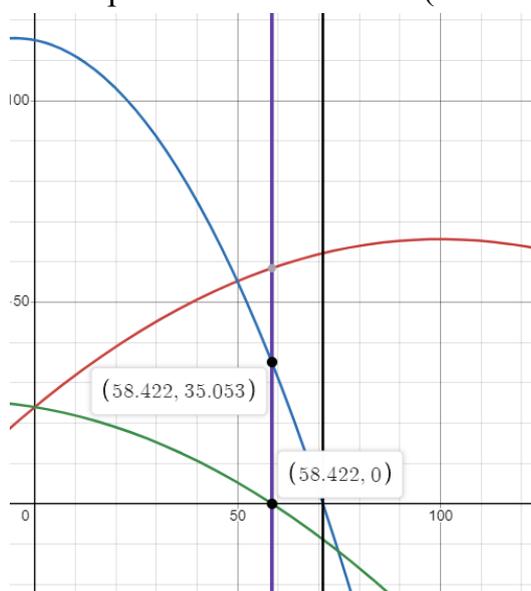
Объемы потребления с учетом пропорции потребления, и чтобы было выгодно торговать:  $Y - Ex = 0.6(X + Im)$  или  $Y = 0.6X + 4.8 * Im$

Получаем,  $0.6X + 4.8 * Im = 115 - 0.2X - 0.02X^2$ , где  $X \geq 0$ ,  $Im \geq 0$  или  $4.8 * Im = 115 - 0.8X - 0.02X^2$

А поскольку потреблять хотим как можно больше, то фактически максимизируем функцию:

$$X + Im = X + \frac{115 - 0.8X - 0.02X^2}{4.8} = \frac{115 + 4X - 0.02X^2}{4.8} \quad (*)$$

Это парабола ветвями вниз (см. следующий схематичный рисунок),



На рисунке функция (\*) – изображена красным цветом, КПВ – синим цветом, уравнение для импорта – зеленым цветом.

Черная линия – указывает на точку, при которой  $Y$  становится неотрицательным, фиолетовая линия – на точку, при которой и  $Y$ , и  $Im$  становятся неотрицательными.

точка максимума этой функции:  $X^* = 100$  Но при этом  $Y$  и  $Im$  – отрицательные. Чтобы они не были отрицательными, нужно уменьшать  $X$ : при  $X = 70.993$  получаем  $Y = 0$ ,  $Im = -8.874$ ; если же  $X = 58.422$ , тогда  $Im = 0$ ,  $Y = 35.053$ . Но тогда  $Ex = 0$ . Именно в этой второй точке достигается максимум потребления, а это оказывается точка автаркии.

2) Если специализация изменилась:

Пусть  $X$  и  $Y$  – объемы производства соответствующих товаров. Между ними соотношение  $Y = 115 - 0.2X - 0.02X^2$

Пусть  $Im$  – весь импорт товара  $Y$ ,  $Ex$  – весь экспорт товара  $X$ , тогда  $70 * Im = 10 * Ex$  или  $Im = Ex/7$

Объемы потребления с учетом пропорции потребления, и чтобы было выгодно торговать:

$$Y + Im = 0.6(X - Ex) \text{ или } Y = 0.6X - \frac{5.2}{7} * Ex$$

Получаем

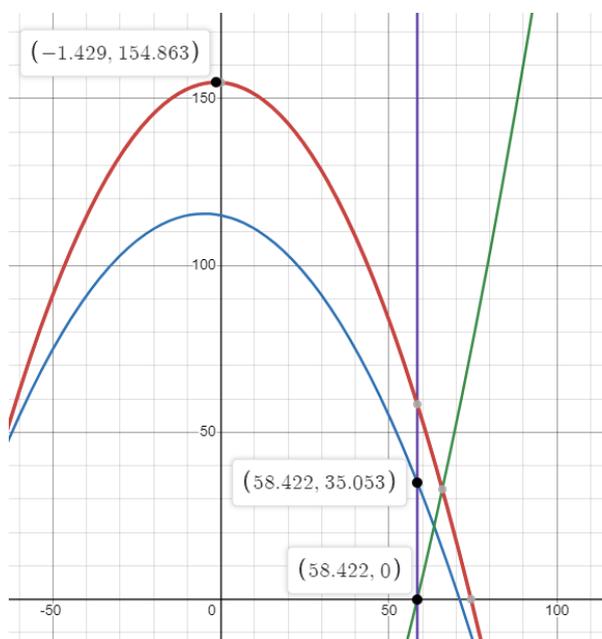
$$0.6X - \frac{5.2}{7} * Ex = 115 - 0.2X - 0.02X^2, \text{ где } X \geq 0, Ex \geq 0$$

$$\text{Или } \frac{5.2}{7} * Ex = 0.02X^2 + 0.8X - 115$$

А поскольку потреблять хотим как можно больше, то фактически максимизируем функцию:

$$X - Ex = X - \frac{7}{5.2} (0.02X^2 + 0.8X - 115) = \frac{805 - 0.4X - 0.14X^2}{5.2} \quad (**)$$

Это парабола ветвями вниз (см. следующий схематичный рисунок),



На рисунке функция (\*\*) – изображена красным цветом, КПВ – синим цветом, уравнение для экспорта – зеленым цветом.

Фиолетовая линия – указывает на точку, при которой  $E_x$  становится неотрицательным, при этом  $Y$  также положителен.

точка максимума функции  $X^* \approx -1.429$  Но при этом  $E_x$  – принимает отрицательное значение. Чтобы он был неотрицательным и при этом функция (\*\*) была как можно больше, нужно взять  $X = 58.422$ , тогда  $E_x = 0$ ,  $Y = 35.053$ . Но тогда  $Im = 0$ . Именно в этой точке достигается максимум потребления, и при этом это оказывается точка автаркии.

**(в)** Поскольку именно товар  $Y$  первоначально экспортировала страна Альфа (пункт (а)) и от него отказалась в ситуации пункта (б), то и рассматривать стоит только его (хотя и возможно рассмотреть обе ситуации как по способу 2 в пункте (б)).

Поступившее предложение от страны Бета – купить любое количество товара  $Y$ , поэтому фактически имеем дело с наклоном линии цен  $42/30 = 1,4$ , что меньше указанной в ситуации автаркии (по модулю), страна вернется в мировую торговлю – будет экспортировать  $Y$  в страну Бета и импортировать товар  $X$ .

Аналогично пункту (а) вычисляется новое уравнение касательной:

$$Y' = -0.2 - 0.04X = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{42}{30} = -1.4$$

Отсюда  $X = 30$  – объем производства товара  $X$  равен 30 тыс. тонн.

Объем производства товара  $Y$  определяем из КПВ:

$$Y = 115 - 0.2 * 30 - 0.02 * 900 = 91 \text{ тыс. тонн}$$

Для определения остальных искомым значений нужно найти уравнение касательной:  $Y = -1.4X + 133$

Точка потребления определяется из пересечения касательной и «линии комплектов». Получаем  $X = 66,5$  тыс. тонн товара  $X$  и  $Y = 39,9$  тыс. тонн товара  $Y$ . Таким образом, импортироваться будет 36,5 тыс. тонн товара  $X$ , экспортироваться 51,1 тыс. тонн товара  $Y$ .

**(г)** Поскольку объем экспорта по 30 тугриков ограничен, то из анализа наклонов линий сделать вывод не получится.

Сначала заметим с учетом предыдущих ответов, что если выгодно продавать  $Y$  по 30, то по этой цене все, что готова купить страна Бета, будет ей продано – ровно 17,5 тыс. тонн товара  $Y$  (следует из пункта (в)). Больше экспортировать товара  $Y$  страна Альфа не будет – не выгодно продавать по 10 (следует из пункта (б)) – экспорт товара  $Y$  составит 17,5 тыс. тонн.

Вычислим, сколько страна при этом будет производить и потреблять:

Пусть  $X$  и  $Y$  – объемы производства соответствующих товаров. Между ними соотношение  $Y = 115 - 0.2X - 0.02X^2$

Пусть  $Im$  – весь импорт товара  $X$ , тогда  $42 * Im = 30 * 17.5 = 525$  или  $Im = 12.5$  тыс. тонн товара  $X$

Объемы потребления с учетом пропорции потребления ( $Y = 0.6X$ ) и чтобы было выгодно торговать:  $Y - 17.5 = 0.6(X + 12.5)$  или  $Y = 0.6X + 25$

Получаем  $0.6X + 25 = 115 - 0.2X - 0.02X^2$

Решаем квадратное уравнение:  $90 - 0.8X - 0.02X^2 = 0$ ,  $X_{1,2} = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.8^2 + 4 * 0.02 * 90}}{2 * (-0.02)} = \frac{0.8 \pm 2.8}{-0.04}$

Нам подойдет только положительный  $X$ :  $X = \frac{2.8 - 0.8}{0.04} = 50$  тыс. тонн

Получаем: производится  $X = 50$  тыс. тонн товара  $X$ ,  $Y = 55$  тыс. тонн товара  $Y$ . Экспортируется только 17,5 тыс. тонн товара  $Y$  по цене 30 в страну Бета, в другие страны по цене 10 не выгодно ничего экспортировать. Импортируется 12,5 тыс. тонн товара  $X$ .

Потребляется  $50 + 12,5 = 62,5$  тыс. тонн товара  $X$  и  $55 - 17,5 = 37,5$  тыс. тонн товара  $Y$ .

Критерии	Балл
(а) всего 5 баллов	
Вычислить объемы производства: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 0 баллов)	1 балл
Вычислить объемы потребления: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 1 балл)	2 балла
Определение, что товар $X$ ввозится и объем этого импорта (если не указано, что это импорт – 0 баллов)	1 балл
Определение, что товар $Y$ вывозится и объем этого экспорта (если не указано, что это экспорт – 0 баллов)	1 балл
(б) всего 5 баллов	
Определение объемов производства $X$ и $Y$ в автаркии (если указано только одно значение, то 1 балл)	2 балла
Аргументированный вывод о том, что страна окажется именно в автаркии	3 балла
(в) всего 5 баллов	
Вычислить объемы производства: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 0 баллов)	1 балл
Вычислить объемы потребления: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 1 балл)	2 балла
Определение, что товар $X$ ввозится и объем этого импорта (если не указано, что это импорт – 0 баллов)	1 балл
Определение, что товар $Y$ вывозится и объем этого экспорта (если не указано, что это экспорт – 0 баллов)	1 балл
(г) всего 5 баллов	
Аргументированный вывод о том, что экспорт равен 17,5 тыс. тонн $Y$	2 балла
Определение величины импорта товара $X$	1 балл
Вычислить объемы производства: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 0 баллов)	1 балл
Вычислить объемы потребления: оба значения $X$ и $Y$ (если указано только одно значение, то 0 баллов)	1 балл

### Задача 3. Снежный городок (15 баллов)

Петя хочет построить снежный городок, вкладывая в это свои средства и планируя продавать билеты всем желающим в нем отдохнуть. Он пытается оценить, какой доход ему ожидать, ориентируясь на доступные ему данные. Если погода хорошая, в снежном городке будет много посетителей, и он рассчитывает зарабатывать в такой день 32 д.е. Если погода плохая, посетителей будет меньше, и его доход составит 8 д.е. Если погода очень плохая, то посетителей не будет, и Петя в такие дни ничего не получит. Оценивая вероятный доход, Петя исходит из многолетней статистики метеорологов, согласно которой зимний сезон длится 80 дней, четверть дней погода плохая, каждый пятый день погода очень плохая, а в остальные дни погода хорошая. Однако примерно каждая пятая зима случается очень холодной, и тогда дней с плохой погодой и дней с очень плохой погодой в два раза больше. Но даже в такую зиму Петя готов работать, несмотря на меньший доход.

Петя может не строить снежный городок, а вложить деньги в проект друга, который по завершении зимнего сезона обещает вернуть ему 900 д.е. – всю сумму вложенных денег с процентом.

(а) Выгодно ли Пете строить снежный городок?

(б) Страховая компания предлагает страховки на случай очень холодной зимы. Можно купить страховку за 100 д.е. и тогда в случае, если зима окажется очень холодной, можно получить от страховой компании 900 д.е. В случае обычной зимы выплаты не будет. Можно ли с помощью покупки страховки увеличить ожидаемый доход от вложений?

(в) Выгодно ли страховой компании страхование на случай холодной зимы с таким соотношением стоимости страховки и страховой выплаты? Обоснуйте свой ответ.

(г) Какие соотношения страховой выплаты и стоимости страховки страхования на случай очень холодной зимы выгодны страховой компании?

#### Решение

А) Количество дней с плохой погодой -  $80/4=20$ , количество дней с очень плохой погодой  $80/5=16$ . Количество дней с хорошей погодой  $80-20-16=44$

Выручка =  $44*32 + 20*8 = 1568$ ,  $80-20*2-16*2=8$ ; Выручка =  $8*32 + 40*8= 576$

Ожидаемая выгода= $0,8*1568 + 0,2*576= 1369,6$ . Это больше, чем 900, поэтому выгодно строить городок

Б) При покупке страховки, если зима будет обычная, то выручка составит  $1568-100=1468$ . Если зима будет очень холодной, то будет страховая выплата и выручка, что в сумме составит  $576-100+900=1376$ , тогда ожидаемый доход  $0,8*1468+0,2*1376=1449,6$ , что больше, чем ожидаемый доход в случае без страховки.

При вложении денег в проект друга можно также застраховаться от плохой зимы, и это тоже увеличит доход, но вложение в строительство снежного городка все равно останется более выгодным: при хорошей зиме его доход равен  $900-100 = 800$ , а в случае холодной зимы  $900-100+900=1700$ . Тогда ожидаемый доход равен  $0,2*1700+0,8*800=980$ , что меньше, чем ожидаемый доход от строительства городка.

В) Страховой компании такое соотношение стоимости страховки и страховой выплаты не выгодно. Если предположить, что найдется покупатель, который будет покупать страховку ежегодно, то компания за пять лет получит 500 руб, а выплатить будет должна 900, так как за пять лет хотя бы одна холодная зима случится. Так что страхование от холодной зимы при такой сумме страховых выплат убыточно.

Г) Из соображений п. в) соотношение цена страховки/страховая выплата должно быть больше вероятности наступления страхового случая, то есть  $1/5$ .

Пункт	Критерии	Балл
А).	Определение выручки в случае, если зима будет хорошая	1
	Определение выручки в случае, если зима будет холодная	1
	Определение ожидаемой выручки	2
	Сравнение с доходом от проекта друга	1
	Если считалась не ожидаемая выручка за один год, а выручка за пять (десять) лет, то снималось 2 балла	
Б).	Расчет выручки с учетом страховки в случае хорошей зимы	1
	Расчет выручки с учетом страховки в случае холодной зимы	1
	Расчет ожидаемого дохода от строительства с учетом страховки	2
	Сравнение со случаем, если вкладывает в проект друга и покупает страховку от холодной зимы	1
	Если считалась не ожидаемая выручка за один год, а выручка за пять (десять) лет, то снималось 2 балла	
В)	Обоснование того, что страховой компании не выгодно такое соотношение стоимости страховки и страховой выплаты	3
Г)	Расчет (обоснование) выгодного для страховой компании соотношения стоимости страховки и страховой выплаты	2
	Всего	15

#### Задача 4. МИКС (30 баллов)

##### 4.1. Новогодние наборы конфет

К Новому году предприниматель Морозов фасует килограммовые наборы с шоколадными конфетами и карамелью. Все шоколадные конфеты он закупает по единой цене  $R_{ш}$  рублей за кг у кондитерской фабрики «Зима», а карамель также по единой цене  $R_{к}$  рублей за кг у кондитерской фабрики «Лето».

Предприниматель Морозов уже подготовил для продажи два вида наборов: наборы «Снеговик», в которых доля шоколадных конфет составляет 80% и наборы «Снегурочка», в которых шоколадных конфет в два раза меньше. Затраты на фасовку любого набора обходятся ему в 30 рублей. Уже есть договоренность, что наборы «Снеговик» будут продаваться по цене 660 рублей и обеспечат предпринимателю рентабельность в 20%, а наборы «Снегурочка» по цене 507 рублей, рентабельность таких наборов составит 30%.

Однако по совету дочки Снежаны предприниматель Морозов решил фасовать еще один вид наборов конфет «Снежинка». Фасовка одного такого набора обойдется на 10 рублей дороже, потому что в набор с конфетами будет положена очень красивая снежинка. Новый вид набора будет продаваться по цене 400 рублей, а прибыль от его продажи составит 80 рублей.

*Примечание: рентабельность рассчитывается как отношение прибыли к себестоимости, выраженное в процентах.*

(а) Определите, какова рентабельность набора «Снежинка».

(б) Рассчитайте, сколько грамм шоколадных конфет должно быть в наборе «Снежинка».

##### Решение

А) Себестоимость набора «Снежинка» равна  $400 - 80 = 320$  рублей. Значит, рентабельность равна  $(80/320) * 100\% = 25\%$

Б) Пусть  $P_{ш}$  – закупочная цена за кг шоколадных конфет, а  $P_{к}$  – закупочная цена за кг карамели.

Тогда для набора «Снеговик» можно записать уравнение:  $(0,8P_{ш}+0,2P_{к})+30+П1=660$ , где  $П1$  – это прибыль от набора «Снеговик».

А так как  $П1/(660-П1)=0,2$ , то  $П1=110$ . Получаем, что  $(0,8P_{ш}+0,2P_{к})=520$ .

Аналогично для набора «Снегурочка» можно записать уравнение:  $(0,4P_{ш}+0,6P_{к})+30+П2=507$ , где  $П2$  – это прибыль от набора «Снегурочка».

А так как  $П2/(507-П2)=0,3$ , то  $П2=117$ . Получаем, что  $(0,4P_{ш}+0,6P_{к})=360$ .

Итак, мы имеем два уравнения:  $0,8P_{ш}+0,2P_{к}=520$  и  $0,4P_{ш}+0,6P_{к}=360$ . Отсюда находим, что  $P_{к}=200$ , а  $P_{ш}=600$

Запишем для набора «Снежинка» соотношение:  $(X \cdot 600 + (1-X) \cdot 200) + 40 + 80 = 400$ , где  $X$  – это доля шоколадных конфет в наборе «Снежинка» (в долях).

Получаем, что  $X=0,2$ , т.е. доля шоколадных конфет в наборе «Снежинка» составляет 0,2, или 20%. А так как набор весит один килограмм, следовательно, в этом наборе должно быть 200 грамм шоколадных конфет.

#### Критерии (10 баллов)

А)	Расчет рентабельности набора «Снежинка»	1 балл
Б)	Составление системы уравнений для расчета цен конфет	6 баллов
	Составление уравнения для расчета доли шоколадных конфет в наборе «Снежинка»	1 балл
	Расчет количества шоколадных конфет в наборе «Снежинка» (в граммах)	2 балла

#### 4.2. Комплекты мебели

Производственные возможности столярной мастерской за месяц работы описываются ограничением  $3A+5B+6C \leq 1860$ , где  $A$  – количество столов в штуках,  $B$  – количество скамеек в штуках,  $C$  количество табуреток в штуках. Мастерская получила заказ на изготовление комплектов мебели (1 стол + 2 скамейки + 3 табуретки).

(а) Какое максимальное количество таких комплектов мебели может изготовить мастерская за месяц?

(б) Определите, какую выручку от продажи комплектов получила мастерская, если известно, что все комплекты были проданы, а затраты на производство одного комплекта составили 40 тысяч рублей, и они оказались на 20% меньше прибыли от его продажи.

#### Решение

А) Пусть  $X$  – это количество изготовленных комплектов. Тогда количество изготовленных столов – это  $A=X$ , количество изготовленных скамеек – это  $B=2X$ , а количество изготовленных табуреток – это  $C=3X$ .

Подставим значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в ограничение получаем  $3X+5 \cdot 2X + 6 \cdot 3X \leq 1860$ , т.е.  $31X \leq 1860$ . Значит максимальное значение  $X$  равно 60, т.е. мастерская может изготовить максимум 60 комплектов.

Б) Прибыль от продажи комплекта равна  $40/0,8=50$  тысяч рублей, значит, цена комплекта равна  $40+50=90$  тысяч рублей. Соответственно выручка от продажи всех комплектов равна  $90 \cdot 60=5400$  тысяч рублей.

#### Критерии (10 баллов)

А)	Запись соотношений, позволяющих рассчитать количество комплектов	5 баллов
	Верный ответ	2 балла

Б)	Расчет цены комплекта	2 балла
	Расчет выручки от продажи комплектов	1 балл

### 4.3. Бизнес Марины на ярмарке мастеров

Марина решила принять участие в ярмарке мастеров, которая должна пройти через месяц в родном городе. На ярмарке она планирует продавать оригинальные украшения собственного производства. По её оценкам выручка от продажи этих украшений составит 140 тыс. руб.

Марина думает взять кредит в микрофинансовой организации в размере 60 тыс. руб., с условием погасить его через месяц с процентами (4 тыс. руб.). На эти деньги она намерена закупить нужные расходные материалы (40 тыс. руб.) и выплатить аванс (20 тыс. руб.) помощнице, пообещав после завершения ярмарки доплатить ей еще 25 тыс. руб.

Всё нужное оборудование Марина хочет купить на свои деньги, затратив на его покупку 100 тыс. руб. Она посчитала, что износ этого оборудования за месяц использования может быть оценен в 2 тыс. руб.

Производством украшений Марина собирается заниматься в собственной мастерской, которую она могла бы сдать в аренду за 10 тыс. руб. с оплатой в конце месяца. Известно, что ставка по накопительному счету, где Марина хранит свои сбережения, составляет 1% в месяц. Также известно, что вместо подготовки к ярмарке Марина может устроиться на работу горничной в гостиницу с зарплатой 40 тыс. руб. или мерчендайзером в магазин с зарплатой 45 тыс. руб.

(а) Рассчитайте для Марины бухгалтерские издержки, связанные с подготовкой к ярмарке, выделив основные статьи расходов: материальные затраты, расходы на оплату труда, амортизация, прочие расходы.

(б) Оцените величину неявных издержек Марины.

(в) Оцените размер ожидаемой бухгалтерской и экономической прибыли Марины.

(г) Дайте оценку выгодности данного вида бизнеса для Марины, представив соответствующие пояснения и рекомендации.

#### Решение

А) Бухгалтерские издержки Марины, сгруппированные по основным статьям расходов:

- материальные затраты: 40 тыс. руб.
- расходы на оплату труда:  $20+25=45$  тыс. руб.
- амортизация: 2 тыс. руб.
- прочие расходы: 4 тыс. руб.

ИТОГО бухгалтерские издержки Марины – 91 тыс. руб.

Б) Неявные издержки Марины:

- неполученная плата за сдачу мастерской в аренду – 10 тыс. руб.
- неполученные проценты по накопительному счету – 1 тыс. руб.
- неполученная зарплата мерчендайзера – 45 тыс. руб.

ИТОГО неявные затраты 56 тыс. руб

В) Бухгалтерская прибыль Марины  $140-91=49$  тыс. руб.

Экономическая прибыль Марины  $49-56= -7$  тыс. руб.

Г) Так как экономическая прибыль меньше нуля, то данный вид бизнеса для Марины не выгоден. При прочих равных условиях ей лучше сдать мастерскую в аренду, оставить деньги на накопительном счете, а самой устроиться на работу мерчендайзером.

**Критерии (10 баллов)**

А)	Правильный расчет прочих затрат	2 балла
	Правильная сумма бухгалтерских издержек	1 балл
Б)	Правильный расчет неявных издержек	3 балла
В)	Расчет бухгалтерской и экономической прибыли	2 балла
Г)	Вывод о невыгодности бизнеса и рекомендации для Марины	2 балла

### Задача 5. Динамическая оптимизация для царя Кашея (20 баллов)

Бессмертный царь Кашей, чахнувший над золотом, решил увеличить поступление денег в свои сундуки, открыв новое предприятие по выпуску шоколадных фигурок дракончиков. При открытии предприятия Кашей выделит из сундуков менеджерам предприятия достаточную сумму на закупку нового оборудования и на оплату других производственных расходов на первый год работы.

Срок службы оборудования – четыре года, по истечении которых оно рассыпается в прах. По истечении каждого года работы все имеющееся старое оборудование может быть продано по цене  $L$  и в начале каждого следующего года заменено на новое – оно приобретается по цене  $S$ . Цена продажи старого оборудования (в млн. золотых монет) задается формулой  $L = 8 - 2k$ , где  $k$  – возраст продаваемого оборудования в годах ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Цена покупки нового оборудования (в млн. золотых монет) на ближайшие пять лет задается формулой  $S = 10 + n$ , где  $n$  – год покупки,  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Если возраст оборудования составляет  $k$  лет ( $k = 0, 1, 2, 3$ ), то годовой объем производства (в тыс. фигурок) вычисляется по формуле  $Q = 250 - 5k - 5k^2$ , а сумма средств, которая идет на оплату прочих производственных расходов, помимо расходов на оборудование, составляет  $C = 10 + 0.5k + 0.5k^2$  млн. золотых монет. Эти средства также выделяются Кашеем в начале каждого года.

Цена дракончиков фиксирована – 100 золотых монет за фигурку и не меняется год от года. Все произведенные за год фигурки дракончиков полностью распродаются в этом же году.

По истечении каждого года работы менеджеры, получив от Кашея указание продавать оборудование или нет, сдают ему все деньги (золотые монеты), которые были получены как от продажи фигурок, так и от продажи подержанного оборудования (если оно, согласно указанию, было продано). Эту сумму царь складывает в сундук, после чего выделяет деньги на следующий год работы, то есть на закупку нового оборудования (если это необходимо) и на выплаты по другим статьям расходов.

Стратегию замены оборудования на ближайшие пять лет было поручено разработать Змею Горынычу. Первая голова Горыныча предложила менять оборудование только после того, как оно выработает весь свой ресурс, вторая голова – менять в начале каждого года, третья – самая умная – менять так, чтобы прирост суммы денег в сундуке за пять лет оказался максимальным. Однако, ни одна из предложенных стратегий не устроила Кашея: он считал, что прирост злата в сундуке должен быть максимально возможным каждый год. Поэтому царь Кашей решил, что он ежегодно сам будет определять, заменять оборудование или нет, следуя своей собственной стратегии.

**(а)** На какую сумму может прирасти богатство Кашея за пять лет в соответствии со стратегиями каждой из трех голов? Когда следует заменять оборудование в соответствии со стратегией третьей головы Горыныча?

**(б)** Когда будет заменяться оборудование в соответствии со стратегией царя Кашея? Насколько больше или меньше денег получит Кашей за пять лет по сравнению со стратегией, предложенной третьей головой Горыныча?

**Решение**

Заметим, что в задаче важно, в какие моменты времени происходит приток и отток денег. Исходя из условия задачи, будет считать, что приток денег (выручка от продажи фигурок и выручка от продажи подержанного оборудования) происходит в конце года, а отток денег (на оплату производственных расходов и оплату покупки нового оборудования) из сундуков – в начале года.

Также отметим, что предприятие Кашея не закрывается по истечении пяти лет работы, а решение о продаже оборудования в конце пятого года зависит от стратегии замены оборудования.

Наконец, отметим, что задача дискретная (на это указывают приведенные в условии конкретные значения  $k$  и  $n$ ), поэтому вся необходимая информация может быть представлена в табличном виде:

- стоимость нового оборудования

Год, $n$	Стоимость $S$ , млн. руб.
1	11
2	12
3	13
4	14
5	15

- показатели, связанные с использованием оборудования

Возраст оборудования $k$ , лет	Выручка $P * Q$ , млн. золотых монет	Производственные расходы $C$ , млн. золотых монет.	Цена продажи старого оборудования $L$ , млн. золотых монет.
0	25	10	–
1	24	11	6
2	22	13	4
3	19	16	2
4	–	–	0

**(а)** Рассматриваем стратегии первой и второй голов с учетом имеющейся информации о поступлениях и расходах.

**Стратегия первой головы** – «выработать ресурс до конца»:

- первый год – купили новое оборудование, его возраст пока 0 лет, приток денег составит:  $25$  (выручка) –  $10$  (производственные расходы) –  $11$  (стоимость оборудования в году 1) =  $4$  млн. золотых монет.
- второй год – оставляем старое, оно уже один год отработало, приток денег:  $24 - 11 = 13$  млн. золотых монет
- третий год – оставляем старое, оно уже два года отработало, приток денег:  $22 - 13 = 9$  млн. золотых монет.
- четвертый год – оставляем старое, оно уже три года отработало приток денег:  $19 - 16 = 3$  млн. золотых монет
- пятый год – старое отработало 4 года и рассыпалось в прах, нужно покупать новое, приток денег составит:  $25 - 10 - 15$  (стоимость оборудования в году 5) =  $0$  млн. золотых монет.

Всего:  $4+13+9+3+0=29$  млн. золотых монет.

**Удобно записать так:**

$$ПР = (25+24+22+19+25) - (10+11+13+16+10) - (11+15) = 29$$

Заметим, что в соответствии с этой стратегией продавать оборудование в конце пятого года не нужно, так как оно не выработало свой ресурс.

**Стратегия второй головы** – «покупать новое каждый год», дополнительно получая деньги от продажи подержанного оборудования:

- первый год:  $25$  (выручка) –  $10$  (производственные расходы) –  $11$  (стоимость оборудования в году 1) +  $6$  (продажа в конце года оборудования, отработавшего 1 год) =  $10$  млн. золотых монет.

- второй год:  $25 - 10 - 12$  (стоимость оборудования в году 2) +  $6 = 9$  млн. золотых монет.

- третий год:  $25 - 10 - 13$  (стоимость оборудования в году 3) +  $6 = 8$  млн. золотых монет.

- четвертый год:  $25 - 10 - 14$  (стоимость оборудования в году 4) +  $6 = 7$  млн. золотых монет.

- пятый год:  $25 - 10 - 15$  (стоимость оборудования в году 5) +  $6 = 6$  млн. золотых монет.

Всего:  $10+9+8+7+6=40$  млн. золотых монет.

**Удобно записать так:**

$$ПР = (25+25+25+25+25) - (10+10+10+10+10) - (11+12+13+14+15) + (6+6+6+6+6) = 40$$

Поскольку здесь требуется менять оборудование каждый год, то оно обязательно продается в конце пятого года.

**По стратегии третьей головы** (получить максимум прироста денег за пять лет) прирост денег зависит от того, как часто будет меняться оборудование и сколько оно проработает. При этом заметим, что от выбора – заменять оборудование в некотором году работы предприятия или нет – будут зависеть решения о замене (или сохранении) оборудования в последующие годы работы предприятия. Только решение в начале последнего года не будет влиять на последующие решения. Поэтому определение стратегии стоит начинать с последнего года (именно в этом и заключается принцип динамической оптимизации, называемый принципом Беллмана).

Наконец, заметим, что, максимизируя прирост денег за пять лет, умная третья голова однозначно решит в конце пятого года продать оборудование, если оно к этому сроку не рассыпалось. Таким образом, принимая решение о замене оборудования в конце 4-ого года, Горыныч будет ориентироваться на прирост денег за весь пятый год с учетом продажи оборудования в конце пятого года.

Ну и так как вычисляем прирост за пять лет, то не будем «разводить» момент продажи старого оборудования и момент покупки нового – на решении это не скажется, а рассуждения облегчит.

**В конце 4 года (на начало пятого года)** имеющееся оборудование отработало 1, 2, 3 или 4 года:

- если отработало 4 года, то дальше только заменять – покупать новое, прирост денег за пятый год с учетом последующей продажи в конце пятого года (за пятый год новое оборудование отработает один год, цена его продажи составит 6) составит:

$25 - 10 - 15$  (стоимость оборудования в году 5) +  $6$  (продажа отработавшего год оборудования) = **6 млн. золотых монет. Нужно заменить (с суммарным приростом 6).**

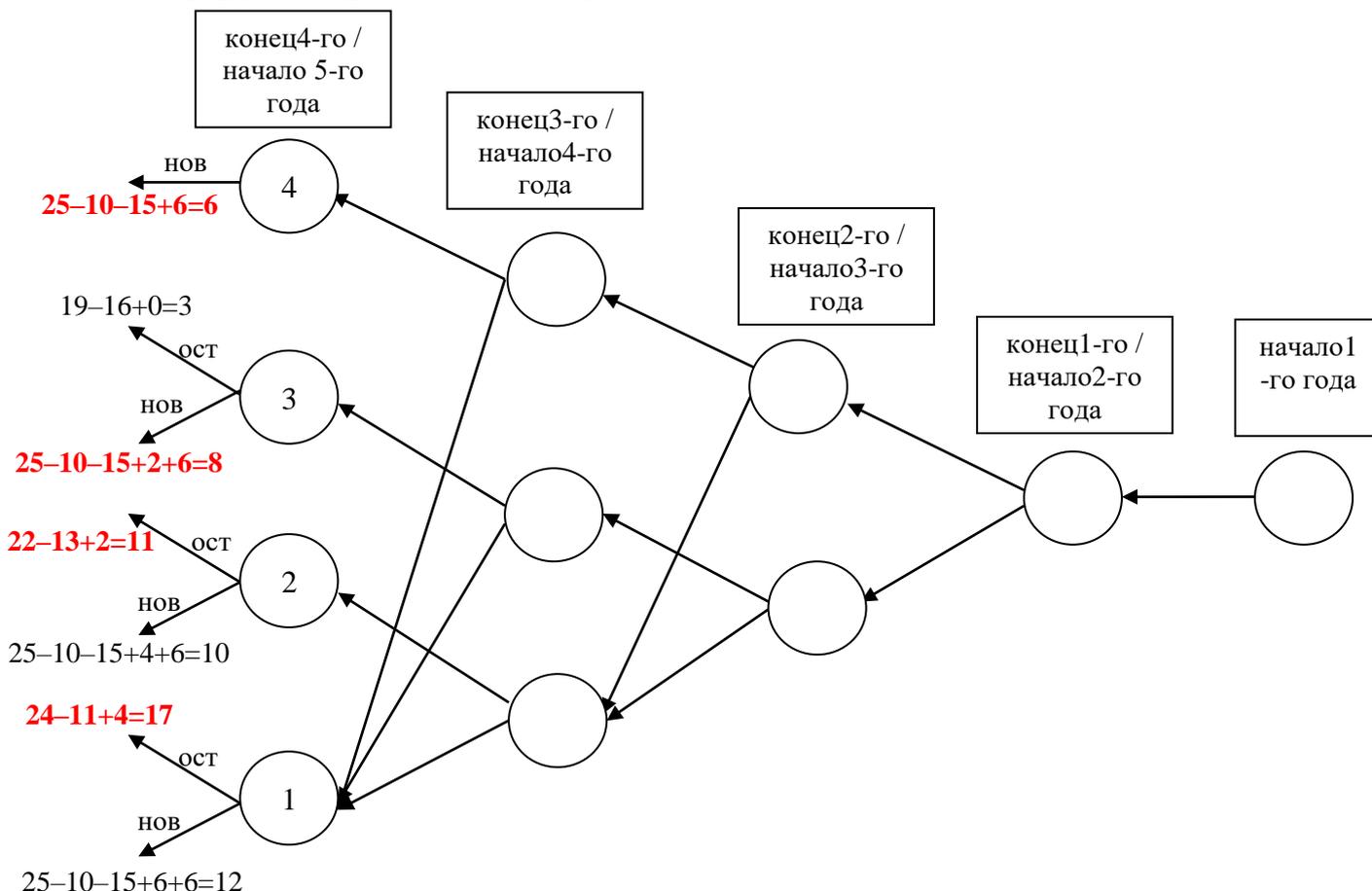
- если отработало 3 года, то можно оставить – прирост за пятый год составит:  $19-16+0$  (в конце пятого его не продать) = **3 млн. золотых монет** можно заменить – прирост составит:

2 (продажа в конце 4 года оборудования, отработавшего 3 года) + 25 (выручка от нового оборудования) – 10 (производственные расходы) – 15 (стоимость нового оборудования в 5-ом году) + 6 (продажа отработавшего год оборудования) = **8 млн. золотых монет**

**Выгодно заменить (с суммарным приростом 8).**

- если отработало 2 года, то можно оставить (прирост  $22-13+2=11$ ), можно заменить ( $4+25-10-15+6=10$ ). **Выгодно оставить (с суммарным приростом 11).**
- если отработало 1 год, то можно оставить (прирост  $24-11+4=17$ ), можно заменить ( $6+25-10-15+6=12$ ). **Выгодно оставить (с суммарным приростом 17).**

Удобно все это представить следующей схемой (она не обязательна, но хорошо иллюстрирует все рассуждения – проведенные и последующие):



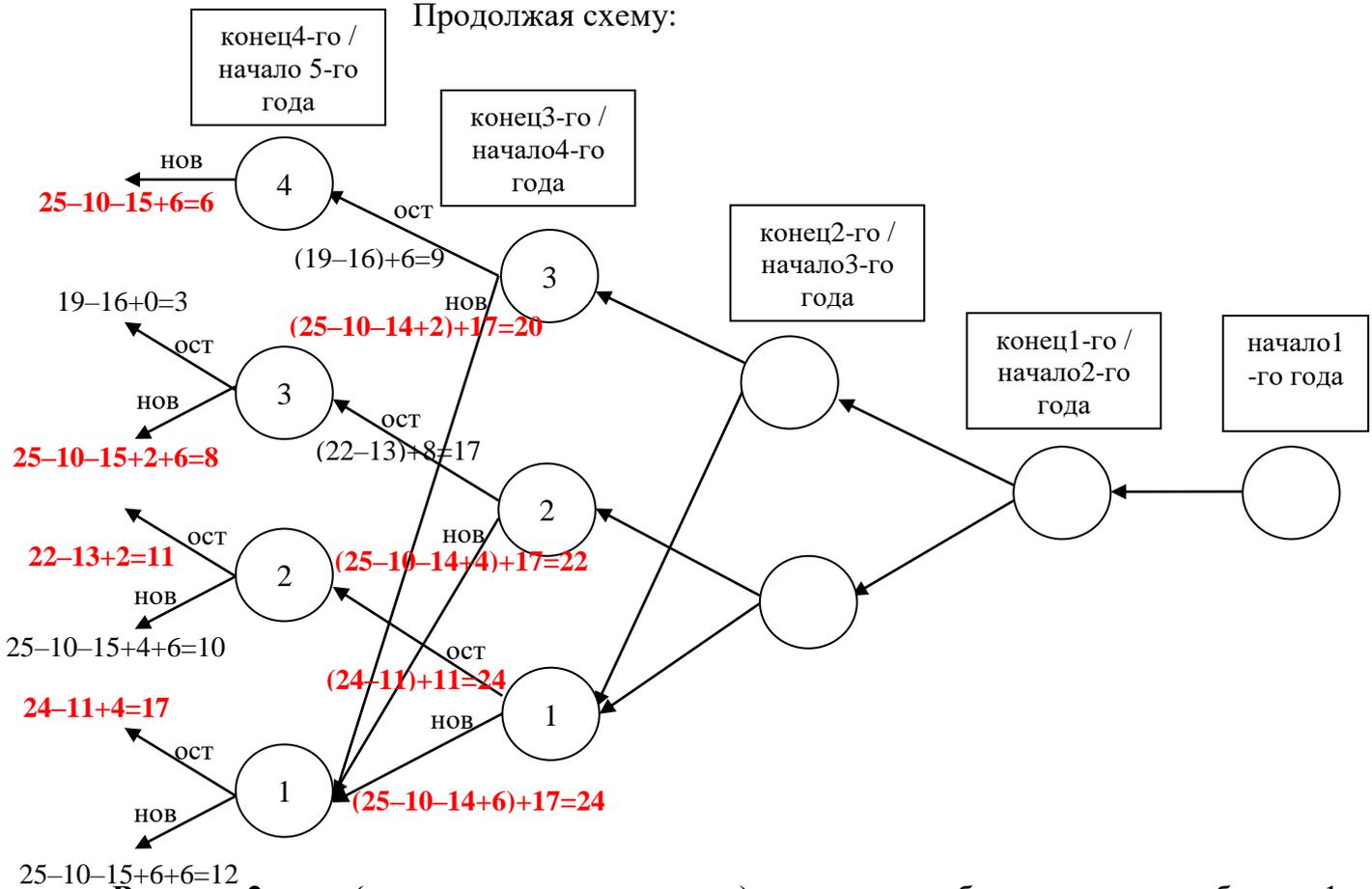
**В конце 3 года (на начало четвертого года)** имеющееся оборудование отработало 1, 2 или 3 года:

- если отработало 3 года, то можно оставить – прирост за четвертый и пятый годы составит:  $19-16$  (прирост за 4 год) + 6 (прирост в пятом году для оборудования, отработавшего  $3+1=4$  года) = **9 млн. золотых монет** можно заменить – прирост составит: 2 (продажа в конце 3 года оборудования, отработавшего 3 года) + 25 (выручка от нового оборудования) – 10 (производственные расходы) – 14 (стоимость нового оборудования в 4-ом году) + 17 (прирост в пятом году для оборудования, отработавшего 1 год) = **20 млн. золотых монет**

**Выгодно заменить (с суммарным приростом 20).**

- если отработало 2 года, то можно оставить (прирост  $22-13+8$  (отработало 3 года) = 17), можно заменить ( $4+25-10-14+17$  (отработало 1 год) = 22). **Выгодно заменить (с суммарным приростом 22).**
- если отработало 1 год, то можно оставить (прирост  $24-11+11$  (отработало 2 года) = 24), можно заменить ( $6+25-10-14+17$  (отработало 1 год) = 24). **Оба варианта подходят (с суммарным приростом 24).**

Продолжая схему:

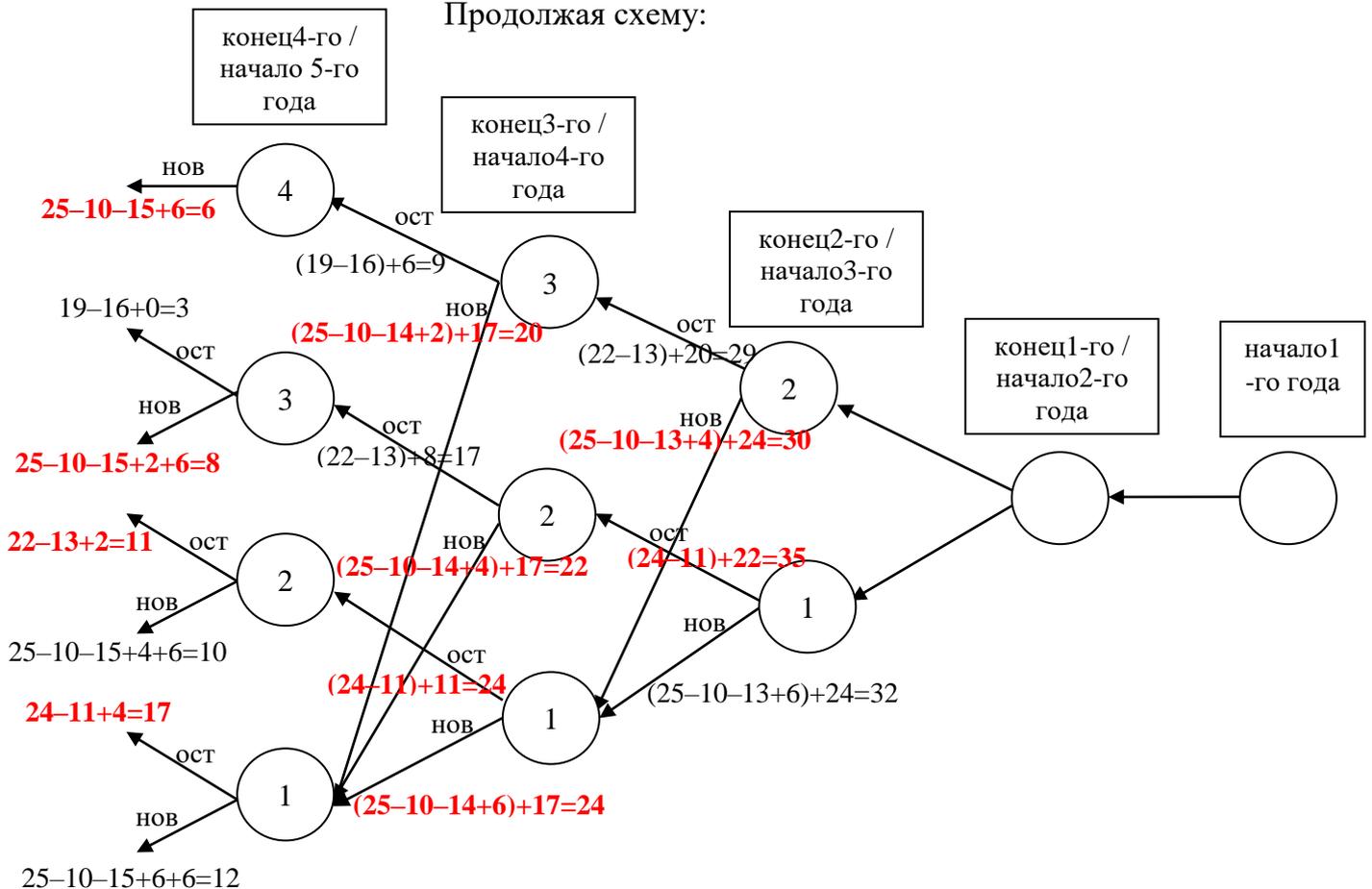


25-10-15+6+6=12

**В конце 2 года (на начало третьего года) имеющееся оборудование отработало 1 или 2 года:** - если отработало 2 года, то можно оставить (прирост  $22-13+20$  (отработало 3 года) = 29), можно заменить ( $4+25-10-13+24$  (отработало 1 год) = 30). **Выгодно заменить (с суммарным приростом 30).**

- если отработало 1 год, то можно оставить (прирост  $24-11+22$  (отработало 2 года) = 35), можно заменить ( $6+25-10-13+24$  (отработало 1 год) = 32). **Выгодно оставить (с суммарным приростом 35).**

Продолжая схему:

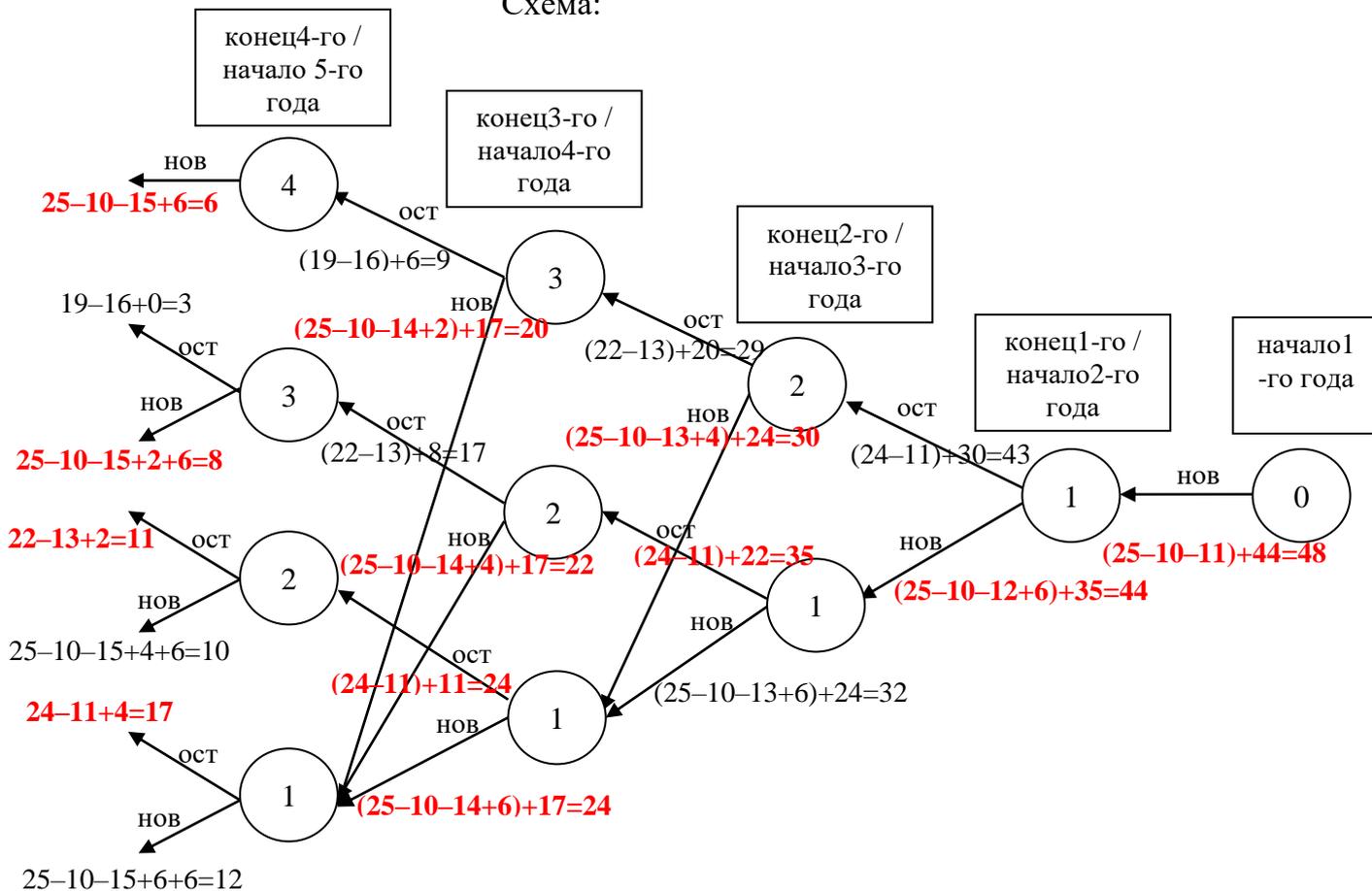


**В конце 1 года (на начало второго года)** имеющееся оборудование отработало 1 год:

- если отработало 1 год, то можно оставить (прирост  $24-11+30$  (отработало 2 года) = 43), можно заменить ( $6+25-10-12+35$  (отработало 1 год) = 44). **Выгодно заменить (с суммарным приростом 44).**

Решение в начале первого года только – покупать новое оборудование, суммарный прирост составит  $25-10-11+44=48$  млн. золотых монет.

Схема:



Собственно стратегию восстанавливаем от последнего шага (первого года) к первому шагу (последнему году) и учитываем, каким максимумом мы пользовались, чтобы получить соответствующий оптимум:

- на начало первого года – покупать новое (по умолчанию) – использовали максимум от предыдущего шага 44;

- на начало второго года – заменить/купить новое (на этом решении достигнут оптимум 44, для него использован максимум 35);

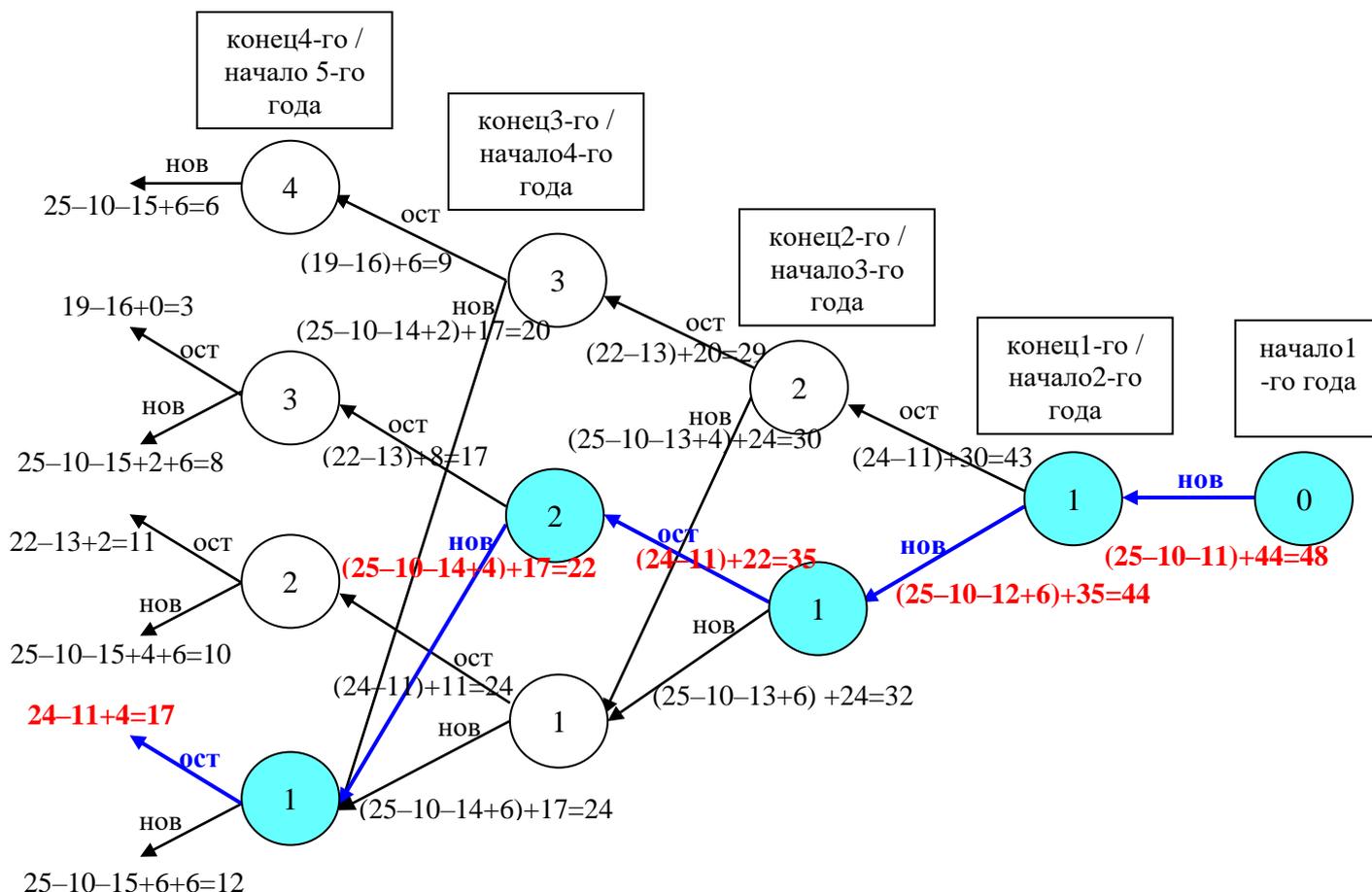
- на начало третьего года – оставить (на этом решении достигнут оптимум 35, использован максимум 22)

- на начало четвертого года – заменить/купить новое (на этом решении достигнут оптимум 22, использован максимум 17)

- на начало пятого года – оставить (на этом решении достигнут оптимум 17) на этот год, а по его окончании продать.

Стратегия «использовать оборудование год (первый), заменить его в начале второго года, использовать два года (второй и третий), заменить в начале четвертого, использовать два года (четвертый и пятый)».

На схеме восстановление этой стратегии – это выделение соответствующих узлов и ветвей от начала первого года до последнего:



(б) Царь Кощей, стараясь обеспечить максимальный ежегодный приток средств в сундуки и принимая решение ежегодно перед дачей указаний менеджерам, будет рассуждать следующим образом:

- по истечении первого года:

оборудование можно оставить (получу  $25-10-11=4$  млн. золотых монет) ИЛИ продать (получу  $25-10-11+6=10$  млн. золотых монет). Вывод – продать старое и купить новое в начале следующего года.

- по истечении второго года:

оборудование можно оставить (получу  $25-10-12=3$  млн. золотых монет) ИЛИ продать (получу  $25-10-12+6=9$  млн. золотых монет). Вывод – продать старое и купить новое в начале следующего года.

- по истечении третьего года:

оборудование можно оставить (получу  $25-10-13=2$  млн. золотых монет) ИЛИ продать (получу  $25-10-13+6=8$  млн. золотых монет). Вывод – продать старое и купить новое в начале следующего года.

- по истечении четвертого года:

оборудование можно оставить (получу  $25-10-14=1$  млн. золотых монет) ИЛИ продать (получу  $25-10-14+6=7$  млн. золотых монет). Вывод – продать старое и купить новое в начале следующего года.

- по истечении пятого года:

оборудование можно оставить (получу  $25-10-15=0$  млн. золотых монет) ИЛИ продать (получу  $25-10-15+6=6$  млн. золотых монет). Вывод – продать старое.

Общий прирост составил  $10+9+8+7+6=40$  млн. золотых монет.

Получаем, что Кашей невольно следовал стратегии второй головы Горыныча – менял оборудование каждый год, – и недополучил 8 млн. золотых монет.

Критерии	Балл
Арифметическая ошибка – минус 1 балл	
(а)всего 16 баллов	
Определить сумму по стратегии первой головы Горыныча	3 балла
Забыли, стоимость оборудования в начале года – минус 1 балл Если «взяли разность» тысяч монет и млн. монет – минус 1 балл ** Второй раз за эту ошибку не штрафует Если продавали оборудование в 5-ый год, то только 1 балл Если считали $Q$ и $C$ при $k=4$ , то 0 баллов за стратегию!	
Определить сумму по стратегии второй головы Горыныча	3 балла
Если оборудование продано не 5 раз (оборудование продается в конце каждого года, а рассматриваемых лет – 5), а 4 (забыли учесть одну продажу в рассматриваемый период), то – минус 1 балл	
Определить сумму по стратегии третьей головы Горыныча	8 баллов
Если не учтено, что в конце пятого года все оборудование следует продать для достижения максимального прироста денег, но найдена верная в этом случае стратегия, то – 5 баллов Если решали перебором, то - неполный перебор и нет оптимальной (то есть можно подобрать стратегию, которая лучше и не указана в рассмотренных) – 0 баллов - неполный перебор, но в рассмотренных есть оптимальная стратегия – только 2 балла	
Записать стратегию третьей головы Горыныча, не противоречащую со-ответствующему решению	2 балла
(б)всего 4 балла	
Определение стратегииКашея	3 балла
По стратегии оборудование продается каждый год (т.е. 5 раз). Если забыли учесть одну продажу, то 0 баллов за стратегию Если указана идея определения стратегии, не противоречащая условию задачи, то 1 балл	
Определение численного значения разности прироста денег по страте-гии Кашея и стратегии третьей головы Горыныча	1 балл