

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

10 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи. Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1 (20 баллов) «Круассаны с начинкой»

Оксана, окончив кулинарный техникум и изучив спрос на кондитерские изделия в своем городе, решила открыть небольшое производство круассанов с шоколадной и ягодной начинкой, чтобы поставлять их в кофейни города. Она провела необходимые расчеты по каждому виду продукта и внесла данные в таблицу, представленную ниже.

Вид начинки	Себестоимость 1 кг, рублей	Отпускная цена 1 кг, рублей	Производственные возможности в месяц, кг
Ягодная	700	1000	900
Шоколадная	1000	1350	750

Кофейни готовы покупать любое количество круассанов, но для разнообразия ассортимента каждого вида круассанов должно быть представлено к продаже не менее 150 кг.

Определите оптимальный объем производства каждого вида круассанов и максимально возможную прибыль, которую может получить начинающий предприниматель Оксана.

Решение:

Пусть x - доля мощностей, занятых на производство круассанов с ягодной начинкой, а y - доля мощностей, занятых под производство круассанов с шоколадной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом круассанов с ягодной начинкой производится $900x$ кг, а с шоколадной начинкой - $750y$ кг.

Из условия ассортиментности следует, что $900x \geq 150$, откуда $x \geq 1/6$, а $750y \geq 150$ откуда $y \geq 1/5$.

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей.

Общая прибыль с произведенной за месяц продукции составит $S(x,y) = 300 \cdot 900x + 350 \cdot 750y = 270000x + 262500y = 750 \cdot (360x + 350y)$

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x,y) = 750 \cdot (360x + 350y)$ при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $360x + 350y$, получаем: $y = 360x + 350(1 - x) = 10x + 350$, функция возрастающая.

Наибольшее значение выражения $S(x,y) = 750 \cdot (10x + 350)$ при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. **(16 баллов за составление функции прибыли, ее ограничений и обоснование ответа)**

При этом Оксана производит 720 кг круассанов с ягодной начинкой ($900 \cdot 4/5$) и 150 кг круассанов с шоколадной начинкой ($750 \cdot 1/5$). **(2 балла)**

Максимально возможная прибыль Оксаны за месяц равна: $750 \cdot (360 \cdot 4/5 + 350 \cdot 1/5) = 268500$ рублей. **(2 балла)**

Второй вариант решения

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей. **(4 балла)**

При этом $900/750 = 1,2$. Это означает, что альтернативная стоимость 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна 1,2 кг круассанов с ягодной начинкой. **(4 балла)**

Заметим, что $1 \cdot 350$ рублей $< 1,2 \cdot 300$ рублей; $350 < 360$. Поэтому более выгодно производить круассаны с ягодной начинкой. Значит, круассанов с шоколадной начинкой необходимо производить 150 кг, а круассанов с ягодной начинкой $900 - 150 \cdot 1,2 = 720$ кг. **(8 баллов)**

Тогда максимально возможная прибыль за месяц: $150 \cdot 350 + 720 \cdot 300 = 268500$ рублей. **(4 балла)**

Ответ: 150 кг – с шоколадной начинкой, 720 кг – с ягодной начинкой; 268 500 рублей.

Задача 2(20 баллов) «Королевские налоги»

Производство волшебных палочек является стратегически важным для экономики страны Волшебная. Покупатели волшебных палочек - все промышленные предприятия страны, использующие волшебные палочки в качестве основного капитала. Спрос на волшебные палочки описывается

функцией: $Q_d = 500 - 4P$, а предложение: $Q_s = 100 + 6P$. Правительство страны, в целях пополнения государственной казны, планирует ввести налог в размере 5 эконо на производителей волшебных палочек на каждую проданную единицу товара.

Король Эконом I пригласил к себе Министра с портфелем и задал ему несколько вопросов:

А) Как изменится рыночная ситуация в случае введения налога, как изменится доход производителей волшебных палочек после уплаты налога? **(8 баллов)**

Б) Какую сумму налога соберет налоговая служба страны Волшебная? **(2 балла)**

В) Чему будет равно налоговое бремя покупателей и продавцов волшебных палочек? Постройте графическую модель. **(6 баллов)**

Г) Чему будут равны чистые потери общества в стране Волшебная? **(4 балла)**

Решение:

А) Найдем параметры рыночного равновесия до введения налогов.

$$500 - 4P = 100 + 6P$$

$P_e = 40$ эконо; $Q_e = 340$ штук; Доход производителей (TR) = $40 \cdot 340 = 13600$ эконо **(2 балла)**

При введении налога на продавцов изменится функция предложения, а функция спроса останется неизменной, в таком случае:

$$Q_{s2} = 100 + 6P \text{ продавца, где } P \text{ продавца} = P \text{ покупателя} - t$$

$$Q_{s2} = 100 + 6(P \text{ покупателя} - t)$$

$$Q_{s2} = 100 + 6(P \text{ покупателя} - 5)$$

$$Q_{s2} = 70 + 6P \text{ покупателя}$$

Новое равновесное значение:

$$500 - 4P = 70 + 6P$$

$$P_{e2} \text{ покупателя} = 43 \text{ эконо; } Q_{e2} = 328 \text{ штук. (3 балла)}$$

$$P \text{ продавца} = 43 - 5 = 38 \text{ эконо.}$$

$$\text{Доход производителей (TR)} = 38 \cdot 328 = 12464 \text{ эконо.}$$

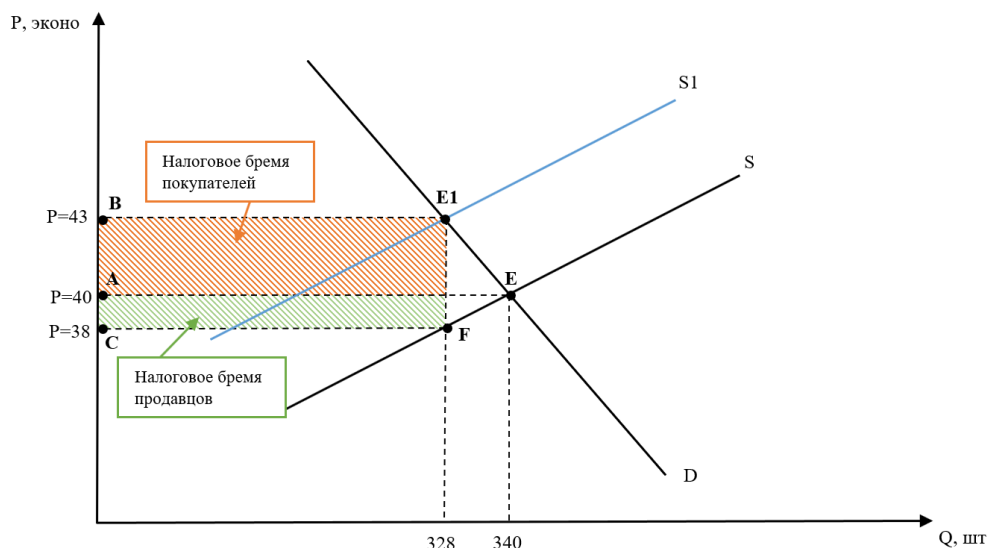
Равновесная цена выросла на 3 эконо (43 – 40). Равновесный объем снизился на 12 штук (328 - 340), доход производителей снизился на 1136 эконо (12464 – 13600). **(3 балла)**

Б) При величине налога в 5 эконо, переложенного на продавцов, величина налоговых поступлений в казну составит: $T = 328 \cdot 5 = 1640$ эконо. Эта сумма соответствует площади прямоугольника BE_1FC . **(2 балла)**

В) Мы можем говорить о переложении налогового бремени на покупателей, так как за каждую единицу товара они теперь платят не 40 эконо, как платили до введения налога, а 43 эконо, т.е. на 3 эконо больше. Эти 3 эконо являются налогом, заплаченным покупателями при покупке волшебных палочек. Всего же покупатели заплатят: $3 \cdot 328 = 984$ эконо – налоговое бремя покупателей. **(2 балла)**

Остальную сумму налога заплатят продавцы: $1640 - 984 = 656$ эконо – налоговое бремя продавцов. **(2 балла)**

Построение графика – 2 балла.



) После введения налога предложение волшебных палочек уменьшилось. Теперь покупатели за каждую единицу товара вынуждены заплатить больше, кроме того, все вместе покупатели волшебных палочек сокращают объем потребления, а это значит, что выигрыш покупателей снижается. Определим величину уменьшения выигрыша потребителя, что соответствует на графике площади трапеции BE_1EA .

Потери выигрыша потребителя: $(328 + 340)/2 * 3 = 1002$ эконо. (1 балл)

Продавцы после введения налога тоже несут потери. Они получают за каждую проданную единицу товара меньше, чем до введения налога, и, кроме того, сокращается объем продаж. Эти потери выигрыша производителя на графике соответствуют площади трапеции $AEFC$.

Потери выигрыша производителя: $(328 + 340)/2 * 2 = 668$ эконо. (1 балл)

Определим чистые общественные потери, т.е. разницу между общей суммой потерь выигрышей потребителей и производителей и суммой налоговых поступлений: $1002 + 668 - 1640 = 30$ эконо. (2 балла)

Чистые потери общества на графике соответствуют так же площади треугольника E_1EF .

Чистые потери общества = $1/2 * 5 * (340 - 328) = 30$ эконо.

Участник может предложить другой вариант нахождения чистых потерь общества, присуждаем 4 балла.

Ответ: А) Равновесная цена выросла на 3 эконо, равновесный объем снизился на 12 штук, доход производителей снизился на 1136 эконо.

Б) 1640 эконо.

В) 984 эконо – налоговое бремя покупателей; 656 эконо – налоговое бремя продавцов. Построение графической модели.

Г) 30 эконо.

Задача 3(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 мант, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 мант, которые будут слеплены Дочкой (две

приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество мант, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси y). **(12 баллов)**

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 мант, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мамы. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? **(8 баллов)**

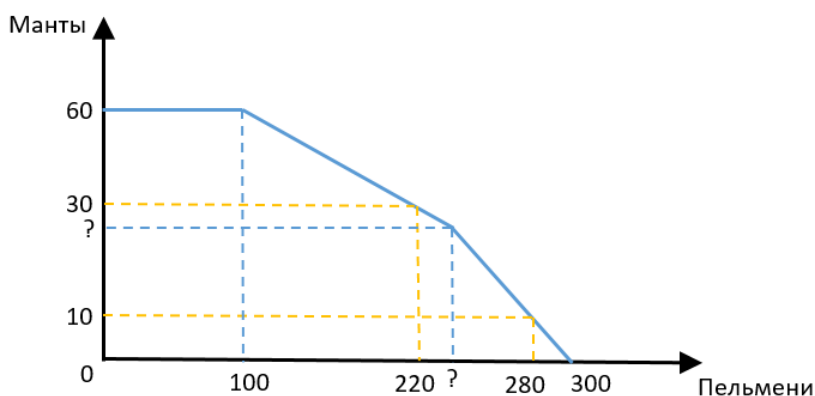
Решение:

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество мант, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси y .

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси x с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой $AC \ 1M = 2П$, следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще $10 \cdot 2 = 20$ пельменей, тогда максимальное число пельменей составит $280 + 20 = 300$ шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. **(3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)**



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид: $M = 85 - 0,25П$. **(3 балла)**

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

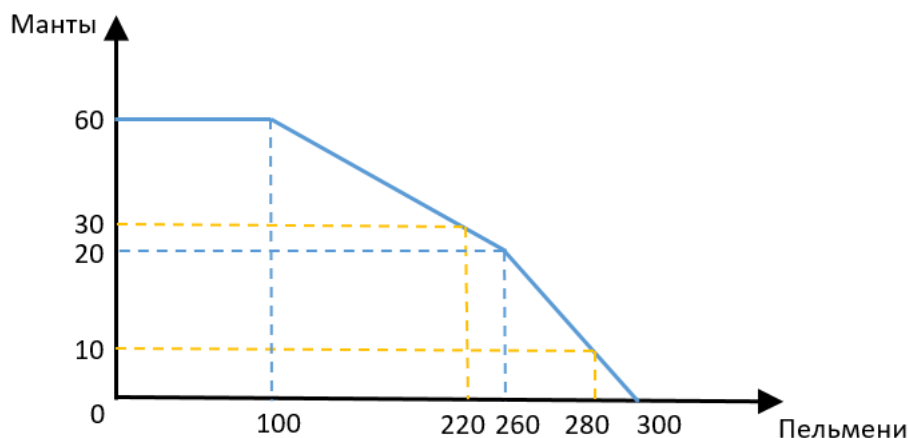
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид: $M = 150 - 0,5\Pi$. (3 балла)

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25\Pi = 150 - 0,5\Pi$$

$\Pi = 260$; $M = 20$. Отметим недостающие данные на графике КПВ. (3 балла)



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.

Пусть x - съедает Папа, а y - съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$$X = 7, Y = 5.$$

По условию дочка съедает $5 - 3 = 2$ шт.

Соответственно необходимо сварить $7 + 5 + 2 = 14$ мант.

(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить $(20 - 14) * 2 = 12$ пельменей. (2 балла)

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит $260 + 12 = 272$ шт. (2 балла)

Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.

Б) 272 шт.

Задача 4 (20 баллов) «Николай начинает бизнес»

Резчик по дереву и бересте Николай хочет арендовать рабочее место в мастерской по изготовлению предметов народного промысла. В мастерской «Дубрава» стоимость аренды места с инструментом составляет 26 000 рублей в месяц, плюс 10% от выручки. На расходные материалы Николай в среднем тратит 500 рублей на одно изделие. А средняя стоимость одного изделия составляет 2000 рублей.

А) При каком минимальном количестве изделий в месяц Николай сможет заработать (выручка превысит расходы)? (12 баллов)

Б) Напишите функции и постройте графики постоянных, переменных, совокупных расходов, выручки. Определите точку безубыточности. (8 баллов)

Решение:

А) **1 вариант.** Пусть x - количество изделий, при котором доходы Николая равны расходам.

Тогда доходы Николая составят $2000x$ рублей, а расходы $26000 + 2000x \cdot 10\% + 500x$.

Приравняем доходы расходам: $2000x = 26000 + 200x + 500x$.

Отсюда $1300x = 26000$, $x = 20$ изделий. **(10 баллов)**

2 вариант. Объем безубыточного производства можно также рассчитать по формуле: $TБ = \text{Постоянные расходы} / (\text{Цена} - \text{Переменные затраты на единицу})$

Переменные затраты на единицу изделия = $500 + 2000x \cdot 10\% = 700$ рублей.

$TБ = 26000 / (2000 - 700) = 20$ изделий.

Николай должен продать больше 20 изделий в месяц, чтобы получить прибыль. Наименьшее целое число изделий - 21 изделие. **(2 балла)**

Б) Для построения графиков постоянных, переменных, совокупных расходов и выручки запишем соответствующие функции:

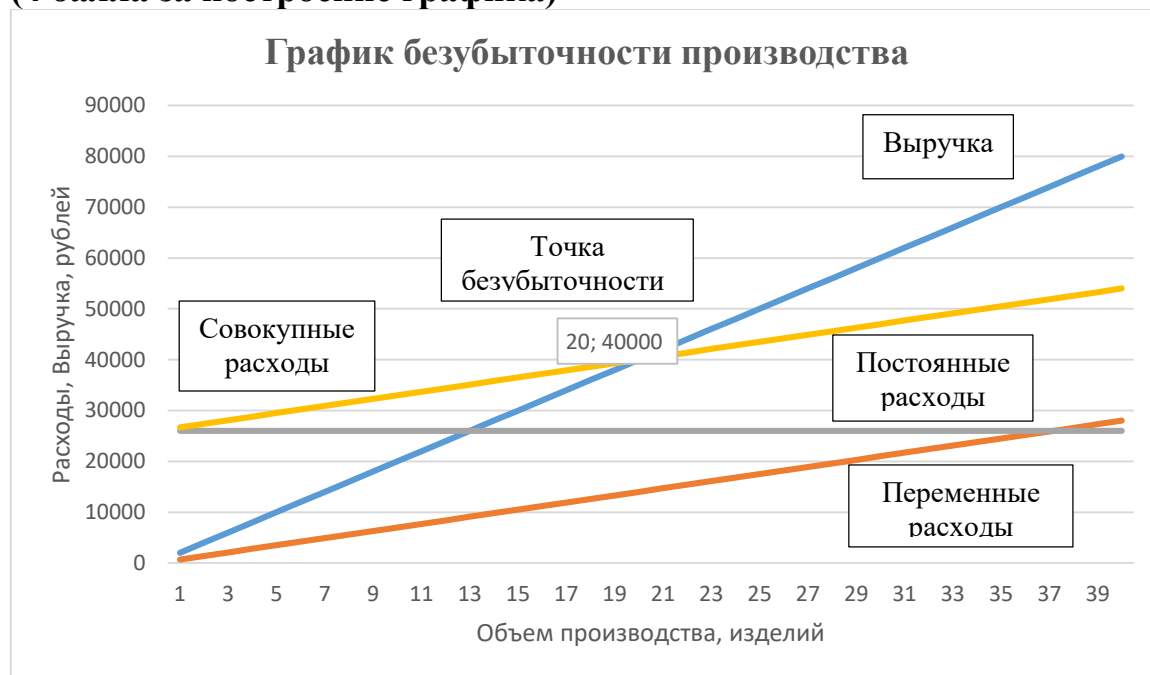
- функция постоянных расходов: $FC = 26000$ **(1 балл)**

- функция переменных расходов: $VC = 700Q$ **(1 балл)**

- функция совокупных расходов: $TC = 26000 + 700Q$ **(1 балл)**

- функция выручки: $TR = 2000Q$ **(1 балл)**

(4 балла за построение графика)



Ответ: А) 21 изделие; Б) Определение функций, построение графика.

Задача 5. «Инвестиционные решения Бабы Яги»

Баба Яга, проживающая в Дремучем лесу Тридевятого царства, по совету Кощея Бессмертного, решила улучшить свое материальное положение. Накопив часть пенсии, она внесла свои сбережения в банк «Лукоморье» под определенный процент годовых. Через некоторое время подруга Кикимора рассказала, что в соседнем Волшебном лесу, есть банк «Чудесный», в котором процент годовых для пенсионеров в 5 раз выше, чем в «Лукоморье»! После долгих размышлений и ровно через год после открытия счета в банке «Лукоморье», Баба Яга сняла треть своих накоплений и открыла счет в банке «Чудесный». В результате через год сумма на

счете в банке «Чудесный» превысила первоначальные кровные сбережения Бабы Яги на 75%.

А) Определите процент годовых в банке «Лукоморье» и в банке «Чудесный». **(15 баллов)**

Б) На сколько процентов выросла сумма первоначальных сбережений Бабы Яги за два года с учетом хранения денег на двух счетах? **(5 баллов)**

Решение:

А) Пусть Баба Яга внесла в банк «Лукоморье» X ден. ед. под $x\%$ годовых.

Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $X(1 + 0,01x)$ ден. ед. **(1 балл)**

Баба Яга сняла треть своих накоплений, т.е. $X(1 + 0,01x)/3$ ден. ед. и поместила эту сумму в банк «Чудесный». **(2 балла)**

За год хранения денег в банке «Чудесный» сумма выросла до $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3$ ден. ед. А эта сумма по условию задачи составляет $1,75X$ ден. ед.

Решим уравнение: $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3 = 1,75X$

$$(1+0,01x)(1+0,05x) = 5,25$$

$$0,0005x^2 + 0,06x - 4,25 = 0$$

$$5x^2 + 600x - 42500 = 0$$

$$x^2 + 120x - 8500 = 0$$

$$D = 114400 - 4(-8500) = 48400$$

$$x_1 = (-120 + 220)/2 = 50$$

$$x_2 = (-120 - 220)/2 = -170$$

По условию задачи подходит положительный корень $x = 50$. Значит в банке «Лукоморье» процент годовых равен 50%. **(10 баллов за составление и решение уравнения)**

В банке «Чудесный» процентная ставка в 5 раз выше, т.е. 250% годовых. **(2 балла)**

Б) На счете в банке «Чудесный» через 1 год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед.

После снятия трети накоплений осталось X ден. ед.

Еще через год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед. **(3 балла)**

Всего накопления Бабы Яги составили $1,5X + 1,75X = 3,25X$, т.е. увеличились в 3,25 раза, или на 225 процентов. **(2 балла)**

Ответ: А) 50% и 250%; Б) увеличилась на 225%.