

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

11 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 мант, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 мант, которые будут слеплены Дочкой (две приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество мант, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси y). (12 баллов)

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 мант, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мама. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? (8 баллов)

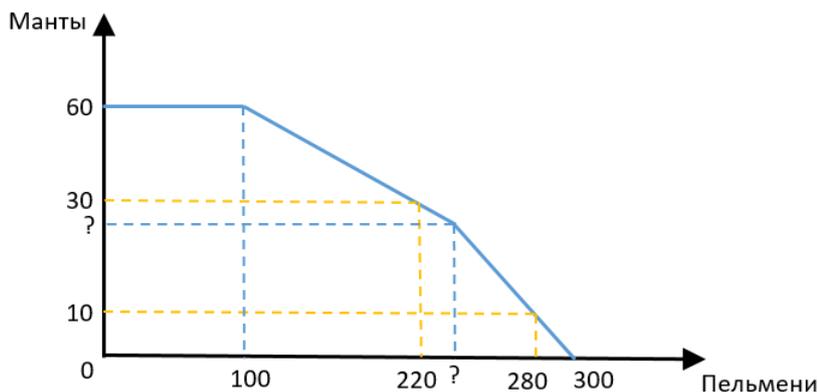
Решение:

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество мант, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси y .

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси x с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой $AC \ 1M=2П$, следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще $10 \cdot 2=20$ пельменей, тогда максимальное число пельменей составит $280+20=300$ шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. (3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид: $M = 85 - 0,25П$. (3 балла)

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

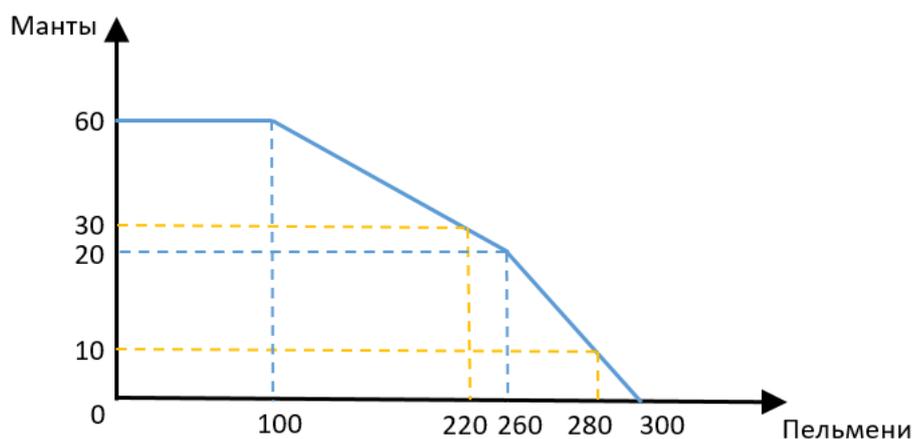
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид: $M = 150 - 0,5П$. (3 балла)

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25П = 150 - 0,5П$$

$П = 260$; $M = 20$. Отметим недостающие данные на графике КПВ. (3 балла)



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.

Пусть x - съедает Папа, а y - съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$X=7$, $Y=5$.

По условию дочка съедает $5 - 3=2$ шт.

Соответственно необходимо сварить $7 + 5 + 2 = 14$ мант.

(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить $(20-14)*2=12$ пельменей. **(2 балла)**

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит $260+12=272$ шт. **(2 балла)**

Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.

Б) 272 шт.

Задача 2(20 баллов) «Инвестиционные решения Бабы Яги»

Баба Яга, проживающая в Дремучем лесу Тридевятого царства, по совету Кощея Бессмертного, решила улучшить свое материальное положение. Накопив часть пенсии, она внесла свои сбережения в банк «Лукоморье» под определенный процент годовых. Через некоторое время подруга Кикимора рассказала, что в соседнем Волшебном лесу, есть банк «Чудесный», в котором процент годовых для пенсионеров в 5 раз выше, чем в «Лукоморье»! После долгих размышлений и ровно через год после открытия счета в банке «Лукоморье», Баба Яга сняла треть своих накоплений и открыла счет в банке «Чудесный». В результате через год сумма на счете в банке «Чудесный» превысила первоначальные кровные сбережения Бабы Яги на 75%.

А) Определите процент годовых в банке «Лукоморье» и в банке «Чудесный». **(15 баллов)**

Б) На сколько процентов выросла сумма первоначальных сбережений Бабы Яги за два года с учетом хранения денег на двух счетах? **(5 баллов)**

Решение:

А) Пусть Баба Яга внесла в банк «Лукоморье» X ден. ед. под $x\%$ годовых.

Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $X(1 + 0,01x)$ ден. ед. **(1 балл)**

Баба Яга сняла треть своих накоплений, т.е. $X(1 + 0,01x)/3$ ден. ед. и поместила эту сумму в банк «Чудесный». **(2 балла)**

За год хранения денег в банке «Чудесный» сумма выросла до $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3$ ден. ед. А эта сумма по условию задачи составляет $1,75X$ ден. ед.

Решим уравнение: $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3 = 1,75X$

$$(1+0,01x)(1+0,05x) = 5,25$$

$$0,0005x^2 + 0,06x - 4,25 = 0$$

$$5x^2 + 600x - 42500 = 0$$

$$x^2 + 120x - 8500 = 0$$

$$D = 114400 - 4(-8500) = 48400$$

$$x_1 = (-120 + 220)/2 = 50$$

$$x_2 = (-120 - 220)/2 = -170$$

По условию задачи подходит положительный корень $x = 50$. Значит в банке «Лукоморье» процент годовых равен 50%. **(10 баллов за составление и решение уравнения)**

В банке «Чудесный» процентная ставка в 5 раз выше, т.е. 250% годовых. **(2 балла)**

Б) На счете в банке «Чудесный» через 1 год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед.

После снятия трети накоплений осталось X ден. ед.

Еще через год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед.

(3 балла)

Всего накопления Бабы Яги составили $1,5X + 1,75X = 3,25X$, т.е. увеличились в 3,25 раза, или на 225 процентов. **(2 балла)**

Ответ: А) 50% и 250%; Б) увеличилась на 225%.

Задача 3 (20 баллов) «Круассаны с начинкой»

Оксана, окончив кулинарный техникум и изучив спрос на кондитерские изделия в своем городе, решила открыть небольшое производство круассанов с шоколадной и ягодной начинкой, чтобы поставлять их в кофейни города. Она провела необходимые расчеты по каждому виду продукта и внесла данные в таблицу, представленную ниже.

Вид начинки	Себестоимость 1 кг, рублей	Отпускная цена 1 кг, рублей	Производственные возможности в месяц, кг
Ягодная	700	1000	900
Шоколадная	1000	1350	750

Кофейни готовы покупать любое количество круассанов, но для разнообразия ассортимента каждого вида круассанов должно быть представлено к продаже не менее 150 кг.

Определите оптимальный объем производства каждого вида круассанов и максимально возможную прибыль, которую может получить начинающий предприниматель Оксана.

Решение:

Пусть x - доля мощностей, занятых на производство круассанов с ягодной начинкой, а y - доля мощностей, занятых под производство круассанов с шоколадной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом круассанов с ягодной начинкой производится $900x$ кг, а с шоколадной начинкой - $750y$ кг.

Из условия ассортимента следует, что $900x \geq 150$, откуда $x \geq 1/6$, а $750y \geq 150$ откуда $y \geq 1/5$.

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей.

Общая прибыль с произведенной за месяц продукции составит $S(x,y) = 300*900x + 350*750y = 270000x + 262500y = 750*(360x+350y)$

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x,y)=750*(360x+350y)$ при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $360x + 350y$, получаем: $y = 360x + 350(1 - x) = 10x + 350$, функция возрастающая.

Наибольшее значение выражения $S(x,y) = 750*(10x+350)$ при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. **(16 баллов за составление функции прибыли, ее ограничений и обоснование ответа)**

При этом Оксана производит 720 кг круассанов с ягодной начинкой ($900 \cdot \frac{4}{5}$) и 150 кг круассанов с шоколадной начинкой ($750 \cdot \frac{1}{5}$). **(2 балла)**

Максимально возможная прибыль Оксаны за месяц равна: $750 \cdot (360 \cdot \frac{4}{5} + 350 \cdot \frac{1}{5}) = 268500$ рублей. **(2 балла)**

Второй вариант решения

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей. **(4 балла)**

При этом $900/750 = 1,2$. Это означает, что альтернативная стоимость 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна 1,2 кг круассанов с ягодной начинкой. **(4 балла)**

Заметим, что $1 \cdot 350$ рублей $< 1,2 \cdot 300$ рублей; $350 < 360$. Поэтому более выгодно производить круассаны с ягодной начинкой. Значит, круассанов с шоколадной начинкой необходимо производить 150 кг, а круассанов с ягодной начинкой $900 - 150 \cdot 1,2 = 720$ кг. **(8 баллов)**

Тогда максимально возможная прибыль за месяц: $150 \cdot 350 + 720 \cdot 300 = 268500$ рублей. **(4 балла)**

Ответ: 150 кг – с шоколадной начинкой, 720 кг – с ягодной начинкой; 268500 рублей.

Задача 4 (20 баллов) «Выгодный бизнес»

В городе Бердске водитель Васнецов И.С. арендует легковой автомобиль - такси у автопарка и возит пассажиров по маршруту «Бердск – аэропорт Толмачёво», туда и обратно. Расходы на поездку в одну сторону (стоимость бензина) составляют 250 рублей. Кроме того, Васнецов И.С. платит автопарку арендную плату – 1000 рублей за рабочую смену (независимо от количества поездок). По условию договора аренды автомобиля, водители всегда начинают и заканчивают смену в городе.

Данные рынка показывают, что спрос на поездки линейно зависит от цены. В таблице приведены некоторые значения этой зависимости.

Цена поездки, рублей	Количество поездок за смену (в одну сторону)
500	12
1000	8
1500	4

Какую цену поездки следует установить Васнецову И.С., чтобы его заработок был максимальным (с учётом оплаты бензина и арендной платы)? Каким при этом будет количество поездок за смену?

Решение:

Найдём зависимость числа поездок от цены поездки на основе данных, представленных в таблице.

Определим линейную функцию спроса $y(x) = kx + b$, где x – установленная цена поездки, а $y(x)$ – число поездок с пассажиром. На основе двух точек (данные из таблицы) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 500k + b = 12 \\ 1000k + b = 8 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $k = -0,008$, $b = 16$

Таким образом, функция спроса, зависимость числа поездок от цены имеет вид:

$$Qd = -0,008P + 16 \quad (5 \text{ баллов})$$

Определим обратную функцию спроса: $P = 2000 - Qd/0,008$

Запишем функцию выручки (дохода), как произведение количества поездок на цену поездки: $TR = (2000 - Q/0,008)Q = 2000Q - Q^2/0,008$

Определим функцию общих затрат, которые складываются из произведения количества поездок на стоимость бензина на одну поездку и арендной платы автопарку: $TC = 250Q + 1000$

Определим функцию прибыли, как разницу между доходом и затратами:

$$Pr = TR - TC = 2000Q - Q^2/0,008 - 250Q - 1000 = -Q^2/0,008 + 1750Q - 1000 \quad (5 \text{ баллов})$$

Водитель Васнецов И.С. получит максимальную прибыль, когда предельная прибыль будет равна нулю.

$$MPr = (Pr)' = (-Q^2/0,008 + 1750Q - 1000)' = -250Q + 1750$$
$$-250Q + 1750 = 0; Q = 7 \text{ поездок.}$$

Определим цену поездки, при которой прибыль достигнет максимума:

$$P = 2000 - 7/0,008 = 1125 \text{ рублей.}$$

Максимум прибыли составит: $-7^2/0,008 + 1750*7 - 1000 = 5125$ рублей. (5 баллов)

Мы получили максимальную прибыль, при этом число поездок (7) не четное, что не отвечает условию договора аренды автомобиля.

Какая будет прибыль, если выбрать четное количество поездок, близких к 7, а именно 6 и 8?

Pr (при $Q = 6$) = $-6^2/0,008 + 1750*6 - 1000 = 5000$ рублей, при $P = 2000 - 6/0,008 = 1250$ рублей.

Pr (при $Q = 8$) = $-8^2/0,008 + 1750*8 - 1000 = 5000$ рублей, при $P = 2000 - 8/0,008 = 1000$ рублей.

Как видим, при количестве поездок 6 и 8, прибыль, которую получит Васнецов И.С. одинаковая, 5000 рублей. При этом ему нет необходимости совершать дополнительно 7-ую и 8-ую поездки, которые не принесут дополнительной выгоды. Лучше это время освободить на другие дела, отдых.

Поэтому оптимально для Васнецова И.С. установить цену на одну поездку 1250 рублей и осуществить 6 поездок за смену. (5 баллов)

Ответ: цена 1250 рублей, среднее число поездок с пассажирами 6.

Задача 5(20 баллов) «Проблемы занятости в стране Чудесная»

В экономике страны Чудесная в среднем каждый двадцатый гражданин является безработным, а каждый шестой – не учитывается в составе рабочей силы. Реальный ВВП в текущем году произведен в объеме 1800 млрд. ден. ед.

А) Определите циклический уровень безработицы в стране Чудесная, если ее естественный уровень составляет 2%. (15 баллов)

Б) Определите величину потенциального ВВП в стране Чудесная, если коэффициент Оукена составляет 2,5. (5 баллов)

Решение:

А) Фактический уровень безработицы включает три составляющие: уровни фрикционной, структурной и циклической безработицы ($u_{\text{факт.}} = u_{\text{фрикц.}} + u_{\text{структ.}} + u_{\text{цикл.}}$).

Естественный уровень безработицы определяется как сумма уровней фрикционной и структурной безработицы ($u_{\text{ест.}} = u_{\text{фрикц.}} + u_{\text{структ.}}$).

Тогда циклический уровень безработицы: $u_{\text{цикл.}} = u_{\text{факт.}} - u_{\text{ест.}}$

Уровень безработицы = Безработные/Рабочая сила

Безработные = $1/20 = 0,05$ или 5% **(3 балла)**

Не учитываются в составе рабочей силы = $1/6 = 0,1667$ или 16,67% **(3 балла)**

Рабочая сила = $1 - 0,1667 = 0,8333$ или 83,33% **(3 балла)**

Уровень безработицы = $0,05/0,8333 = 0,06$ или 6% **(3 балла)**

Таким образом, фактический уровень безработицы в стране Чудесная составляет 6%.

Циклический уровень безработицы в стране Чудесная = $6\% - 2\% = 4\%$. **(3 балла)**

Б) Согласно закону Оукена, страна теряет от 2 до 3 процентов фактического ВВП по отношению к потенциальному ВВП, когда фактический уровень безработицы увеличивается на 1 процент по сравнению с ее естественным уровнем.

$$(ВВП_{\text{факт.}} - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = -\beta(u_{\text{факт.}} - u_{\text{ест.}})$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = 2,5*(6 - 2)$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = -10$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} = -0,1$$

$$1800 - ВВП_{\text{потенц.}} = -0,1 * ВВП_{\text{потенц.}}$$

$$1800 = 0,9 * ВВП_{\text{потенц.}}$$

$$ВВП_{\text{потенц.}} = 2000 \text{ млрд. ден. ед. (5 баллов)}$$

Ответ: А) 4%; Б) 2000 млрд. ден. ед.