

## ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК

9 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

### КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

### Задача 1(20 баллов) «Управление банковскими вкладами в стране Дураков»

1 апреля лиса Алиса и кот Базилио положили по 500 золотых на три года в банк «Карабас» под 10% годовых. Проценты по вкладу начисляются один раз в год и прибавляются к основной сумме вклада. Однако через год, опасаясь за сохранность своих сбережений, и Алиса и Базилио сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 200 и 150 золотых.

У кого из компаньонов к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег, и на сколько?

#### Решение:

Сведем проведенные операции и расчеты за три года в таблицу.

Дата, год	Наименование операции	Динамика роста (снижения) накоплений	
		лиса Алиса	кот Базилио
01.04	Принято от клиента	500	500
01.04, через 1 год	Начислено на остаток	$500 \times 1,1 = 550$ (1 балл)	$500 \times 1,1 = 550$ (1 балл)
01.04, через 1 год	Выдано клиенту, остаток на счете	$550 - 55 = 495$ (2 балла)	$550 - 110 = 440$ (2 балла)
01.04, через 2 года	Начислено на остаток	$495 \times 1,1 = 544,5$ (2 балла)	$440 \times 1,1 = 484$ (2 балла)
01.04, через 2 года	Выдано клиенту, остаток на счете	$544,5 - 200 = 344,5$ (2 балла)	$484 - 150 = 334$ (2 балла)
01.04, через 3 года	Начислено на остаток	$344,5 \times 1,1 = 378,95$ (2 балла)	$334 \times 1,1 = 367,4$ (2 балла)
Ответ на вопрос задачи		$378,95 - 367,4 = 11,55$ (2 балла)	

**Ответ: У Алисы на 11,55 золотых больше.**

### Задача 2(20 баллов) «Яблочный бум»

На новой даче у Матрёны Семёновны растут замечательные яблоки. В этом году яблок уродилось много, можно продать свежие, а можно высушить. Сушилка есть у дочери, сушить же придётся самой, взяв сушилку на время. Свежие яблоки содержат 88% воды, а высушенные – 25%. Матрёна Семёновна собрала 80кг яблок.

А) Сколько высушенных яблок может получиться у Матрёны Семёновны?  
**(12 баллов)**

Б) Свежие яблоки можно продать самой на рынке по 200 рублей за пятилитровое ведёрко, в ведёрко входит 4 кг яблок. Сушёные можно сдать на рынке в киоск по 370 рублей за килограмм. Какая продажа будет выгоднее и насколько?  
**(8 баллов)**

**Решение:**

А) Расчеты удобно свести в таблицу. Важно помнить правило, что в продукте, при высушивании, количество воды может меняться, масса сухого вещества остаётся неизменной.

Яблоки	Масса, кг	Вода		Сухое вещество	
		кг	%	кг	%
Свежие	80	70,4	88	9,6	12
Высушенные	<b>12,8</b>	3,2	25	9,6	75

$100\% - 88\% = 12\%$  –% сухого вещества в свежих яблоках. **(3 балла)**

$80:100 \times 12 = 9,6\text{кг}$  –масса сухого вещества в свежих яблоках, которая так же остается неизменной в высушенных яблоках. **(3 балла)**

$100\% - 25\% = 75\%$  –% сухого вещества в высушенных яблоках. **(3 балла)**

$9,6 * 100 : 75 = 12,8\text{кг}$  – масса высушенных яблок. **(3 балла)**

Б) Количество ведерок яблок, которое можно продать на рынке =  $80:4=20$  ведерок. **(2 балла)**

Выручка от продажи свежих яблок =  $200 * 20 = 4000$  рублей. **(2 балла)**

Выручка от продажи высушенных яблок =  $370 * 12,8 = 4736$  рублей. **(2 балла)**

Разница в доходе =  $4736 - 4000 = 736$  рублей. **(2 балла)**

**Ответ: А) 12,8 кг; Б) Выгоднее продавать высушенные яблоки, выручка на 736 рублей больше.**

**Задача 3 (20 баллов) «Николай начинает бизнес»**

Резчик по дереву и бересте Николай хочет арендовать рабочее место в мастерской по изготовлению предметов народного промысла. В мастерской «Дубрава» стоимость аренды места с инструментом составляет 26 000 рублей в месяц, плюс 10% от выручки. На расходные материалы Николай в среднем тратит 500 рублей на одно изделие. А средняя стоимость одного изделия составляет 2000 рублей.

А) При каком минимальном количестве изделий в месяц Николай сможет заработать (выручка превысит расходы)? **(12 баллов)**

Б) Напишите функции и постройте графики постоянных, переменных, совокупных расходов, выручки. Определите точку безубыточности (доходы равны расходам). **(8 баллов)**

**Решение:**

А) **1 вариант.** Пусть  $x$  - количество изделий, при котором доходы Николая равны расходам.

Тогда доходы Николая составят  $2000x$  рублей, а расходы  $26000 + 2000x * 10\% + 500x$ .

Приравняем доходы расходам:  $2000x = 26000 + 200x + 500x$ .

Отсюда  $1300x = 26000$ ,  $x = 20$  изделий. **(10 баллов)**

**2 вариант.** Объем безубыточного производства можно также рассчитать по формуле:  $TБ = \text{Постоянные расходы} / (\text{Цена} - \text{Переменные затраты на единицу})$

Переменные затраты на единицу изделия =  $500 + 2000 \times 10\% = 700$  рублей.

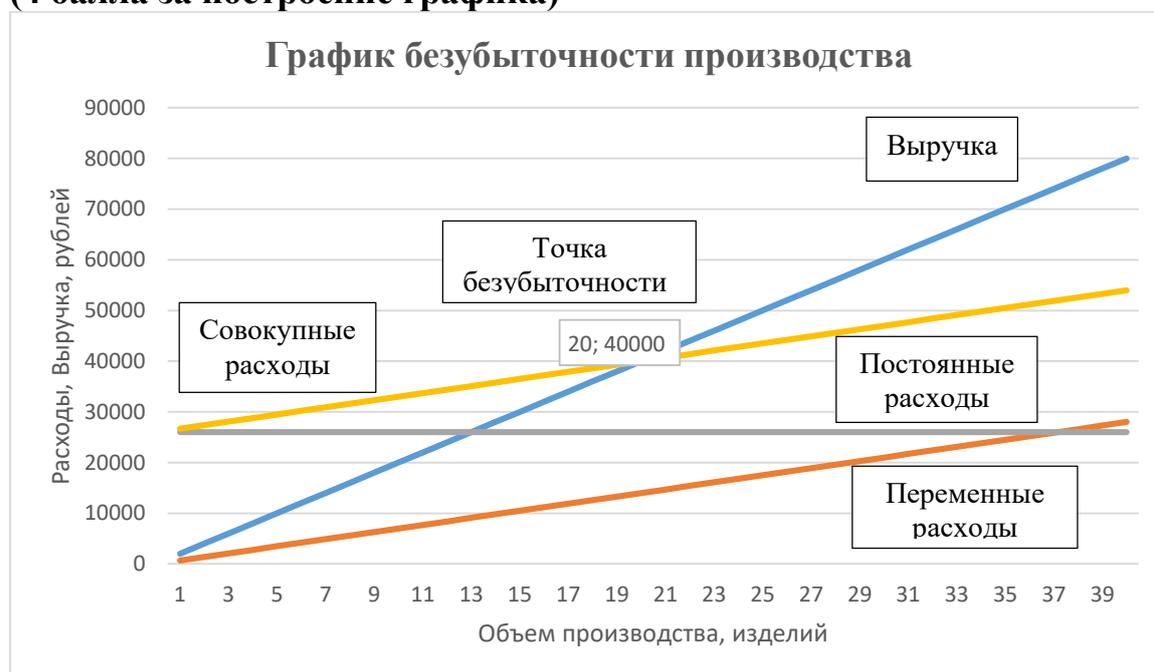
$TБ = 26000 / (2000 - 700) = 20$  изделий.

Николай должен продать больше 20 изделий в месяц, чтобы получить прибыль. Наименьшее целое число изделий - 21 изделие. **(2 балла)**

Б) Для построения графиков постоянных, переменных, совокупных расходов и выручки запишем соответствующие функции:

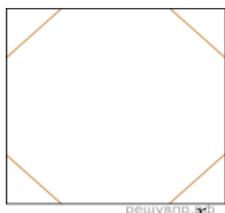
- функция постоянных расходов:  $FC = 26000$  (1 балл)
- функция переменных расходов:  $VC = 700Q$  (1 балл)
- функция совокупных расходов:  $TC = 26000 + 700Q$  (1 балл)
- функция выручки:  $TR = 2000Q$  (1 балл)

**(4 балла за построение графика)**



**Ответ: А) 21 изделие; Б) Определение функций, построение графика.**

#### Задача 4 (20 баллов) «Дизайнерское зеркало»



Мастеру по резке стекла и зеркал Ивану поступил заказ на изготовление дизайнерского зеркала. У него имеется квадратная заготовка с длиной стороны 40 см. Ему необходимо изготовить восьмиугольное зеркало, у которого все стороны и все углы равны.

Для этого, он планирует наметить линии и по этим линиям выполнить отрезки от квадрата (четыре прямоугольных треугольника по углам (см. рисунок)).

А) Помогите Ивану найти приближенно длину отрезка в миллиметрах, считая, что  $\sqrt{2}$  равен 1,41. **(12 баллов)**

Б) Какую сумму должен заплатить заказчик, если стоимость зеркального полотна за  $1 \text{ м}^2$  составляет 18750 рублей. А стоимость работы Ивана алмазным диском 15 рублей за 1 см. **(8 баллов)**

**Решение:**

А) Пусть неизвестный катет равен  $x$  см. По теореме Пифагора, из соотношений сторон в прямоугольном треугольнике находим, что гипотенуза отрезанного треугольника равна  $x\sqrt{2}$ .

Поскольку все стороны восьмиугольника должны быть равны, получаем уравнение  $40 - 2x = x\sqrt{2}$ , откуда  $x(2 - \sqrt{2}) = 40$ , откуда,

$$x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}} = 20(2 - \sqrt{2}).$$

Подставляя значение 1,41 вместо  $\sqrt{2}$  получаем:  $x \approx 20 \cdot 0,59 = 11,8$ .

Итак, длина катета равна приблизительно 11,8 см, то есть 118 мм. **(10 баллов)**

*Участник мог подставить приближённое значение  $\sqrt{2} = 1,41$  в выражение  $x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}}$ . В этом случае  $x = 11,73020\dots$  и правильным ответом следует считать любое верное округление числа 117,302... мм.*

Длина отреза в прямоугольном треугольнике – гипотенуза, следовательно, длина отреза =  $11,8\sqrt{2} = 16,6$  см = 166 мм. **(2 балла)**

Б) Найдем стоимость выполнения заказа.

Стоимость зеркального полотна по размеру  $40 \times 40$  см =  $18750 \cdot (0,4 \cdot 0,4) = 3000$  рублей. **(5 баллов)**

Длина отрезков  $4 \cdot 16,6 = 66,4$  см. **(1 балл)**

Стоимость работы мастера алмазным диском =  $15 \cdot 66,4 = 996$  рублей. **(1 балл)**

Общая стоимость услуг мастера =  $3000 + 996 = 3996$  рублей. **(1 балл)**

**Ответ: А) 166 мм; Б) 3996 рублей.**

### **Задача 5(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»**

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 мант, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 мант, которые будут слеплены Дочкой (две приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество мант, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси  $y$ ). **(12 баллов)**

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 мант, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мамы. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? **(8 баллов)**

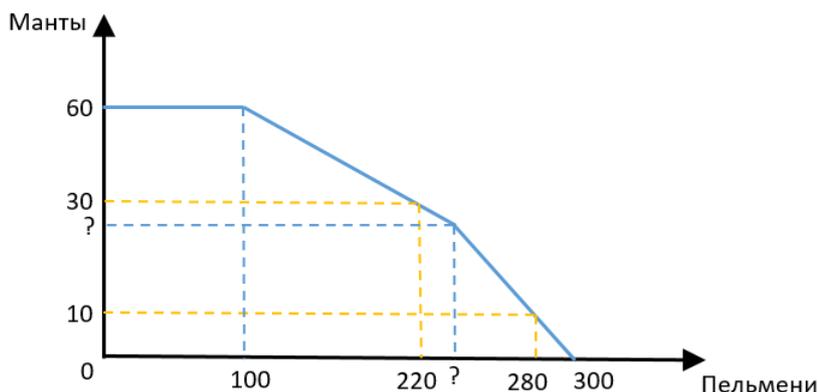
### **Решение:**

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество мант, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси  $y$ .

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси  $x$  с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой  $AC \ 1M=2П$ , следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще  $10 \cdot 2=20$  пельменей, тогда максимальное число пельменей составит  $280+20=300$  шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. **(3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)**



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид:  $M = 85 - 0,25П$ . **(3 балла)**

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

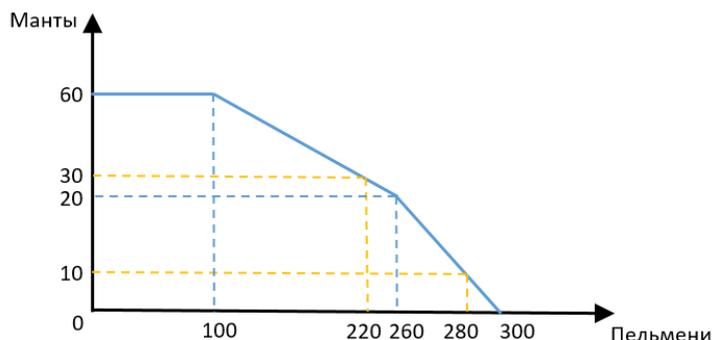
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид:  $M = 150 - 0,5П$ . **(3 балла)**

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25П = 150 - 0,5П$$

$П=260$ ;  $M=20$ . Отметим недостающие данные на графике КПВ. **(3 балла)**



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.

Пусть  $x$  - съедает Папа, а  $y$  - съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$X=7, Y=5.$

По условию дочка съедает  $5 - 3=2$  шт.

Соответственно необходимо сварить  $7 + 5+2 =14$  мант.

**(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).**

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить  $(20-14)*2=12$  пельменей. **(2 балла)**

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит  $260+12=272$  шт. **(2 балла)**

**Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.**

**Б) 272 шт.**