

**XXXII Международный экономический фестиваль школьников
«Сибиряда. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 10-х классов 24.02.2025
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП.**

Максимальная сумма баллов – 100.

Задача 1. Инновация в кредит

Царь Кощей, чахнувший над золотом, и его бессменный советник Змей Горыныч организовали фирму «К&Г» по производству игрушечных дракончиков – металлических и деревянных, используя один дефицитный ресурс: труд подданных царя Кощея. Зависимости годовых объемов производства дракончиков от количества используемого труда описываются функциями: $Q_m = \frac{L}{2}$ и $Q_d = \sqrt{L}$, где Q_m и Q_d – это количество произведенных дракончиков по видам в штуках, а L – это количество использованного труда в единицах труда.

Дракончики фирмы «К&Г» пользуются устойчивым спросом и всегда находят своего покупателя. Фирма «К&Г» дорожит своей репутацией и держит стабильные цены уже очень много лет: металлические дракончики всегда продаются по 10 золотых монет за штуку, а деревянные – по 20 золотых монет за штуку.

Работающие на фирме сотрудники формируют общий годовой фонд рабочего времени в размере 100 единиц труда. За использование каждой единицы труда фирма «К&Г» платит 3 золотые монеты в год. Все другие ресурсы, необходимые для производства дракончиков, достаются фирме «К&Г» бесплатно.

1. Горыныч уже доказал, что фирма «К&Г» получит максимальную годовую прибыль, если будет производить деревянных дракончиков в количестве 2 штуки (и вы это можете проверить сами, если захотите). Определите, сколько при этом будет производиться металлических дракончиков, и каким окажется размер максимальной прибыли.

2. Попад в царство Кощея, Иван предложил фирме «К&Г» купить у него за 1000 золотых монет инновационную технологию производства деревянных дракончиков, основанную на ИИ, которая позволяет в 2 раза повысить производительность каждой единицы труда. Выведите уравнение КПВ для фирмы «К&Г», если она внедрит новую технологию в производство, и оцените, на сколько золотых монет вырастет в этом случае её максимальная годовая прибыль.

3. Кощей отказался платить своим золотом за новую технологию, поэтому Горыныч, вдохновившись идеей внедрения инноваций, решил обратиться в Гномий банк за кредитом. Гномы согласились выдать требуемую сумму, но на следующих условиях. Во-первых, кредит выдается сроком на 10 лет под 10% годовых с использованием формулы простого процента. Во-вторых, согласно схеме погашения кредита и выплаты процентов по нему в конце каждого года обязательно должны быть выплачены:

а) проценты на непогашенную сумму кредита, которая числилась за фирмой на начало года (выплата процентов);

б) одна десятая часть первоначальной суммы кредита (гашение кредита).

Ежегодные расходы на погашение кредита и выплату процентов Горыныч рассчитывает осуществлять из прибыли фирмы.

Будет ли хватать этих денег, если на внедрение новой технологии потребуется целый год – то есть в первый год с момента покупки новой технологии производство деревянных дракончиков будет осуществляться по старой технологии, и только со второго года – по новой? Ответ обязательно обоснуйте. Сколько при этом составит переплата по кредиту, т.е. сумма выплаченных банку процентов?

4. Если гномы будут согласны, чтобы фирма «К&Г» досрочно погасила кредит, то за какое минимальное количество лет она сможет рассчитаться по кредиту? Какой в этом случае окажется экономия на процентах?

Примечание. При расчетах платежей банку все числа округляйте до целых в **БОЛЬШУЮ** сторону – Гномий банк не любит, когда ему недоплачивают даже половину золотой монеты.

Задача 2. Горыныч и волшебное слово

Только в стране горных гномов растет волшебный дуриан и только гном Дурин знает старинный рецепт приготовления из него дури-джема. Дурин варит дури-джем бочками, издержки производства описываются функцией $ТС_x = \frac{Q^2}{2} + 2Q$, где Q – количество бочек в неделю. Однако, у горных гномов генетическая непереносимость дуриана и продуктов из него. А вот равнинные эльфы очень ценят дури-джем и используют его как лекарство от всех болезней. Их спрос на дури-джем описывается функцией $Q_d = 84 - 2P$, где P – цена за бочку (золотых монет).

Путь из страны горных гномов в королевство равнинных эльфов лежит только через туннель в горах, который стережет Горыныч. За проход через туннель в королевство равнинных эльфов он требует 24 золотые монеты и сверх того по 4 монеты за каждую бочку, а еще волшебное слово, которое знает только мохноногий Билл, который закупает дури-джем у Дурина и продает его равнинным эльфам (обратно в страну гномов Горыныч пускает Билла за одно только волшебное слово). Каждый раз при покупке дури-джема Билл яростно торгуется с Дурином, и часто дело доходит до драки.

1. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Дурину, если бы Билл соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

2. Определите, какая закупочная цена дури-джема была бы выгодна Биллу, если бы Дурин соглашался с любой назначенной ценой. Какую прибыль получили бы в этом случае каждый из них?

3. Каждый раз, разнимая дерущихся Дурина и Билла, маг Квазимир уговаривает их создать совместное предприятие, обещая, что он будет им точно предсказывать такой объем выпуска, которой поможет им получить максимально возможную общую прибыль. Разумеется, за определенное вознаграждение. Определите максимально возможное вознаграждение, на которое мог бы рассчитывать Квазимир.

4. Дурин и Билл категорически не желают делиться с Квазимиром. Поэтому каждый раз после ожесточенного торга и даже драки им удается договориться о закупочной цене и заключить сделку. Определите границы диапазона значений закупочной цены, в котором заключается сделка.

Задача 3. Экология очень нужного товара

В маленькой стране один очень нужный товар производит только одна фирма на двух предприятиях, расположенных в разных регионах. На предприятии №1 производство очень нужного товара относительно недорого, но сопровождается вредными выбросами в атмосферу, функция издержек $TC_1 = 3Q_1 + 0,25Q_1^2$. Технология, используемая предприятием №2 экологически совершенно чистая, но производство каждой единицы обходится дороже, функция издержек $TC_2 = 8Q_2 + Q_2^2$ (Q – млн единиц, TC – млн ойро*). Спрос на очень нужный товар описывается функцией $Q = 40 - P$, (P – ойро за единицу) качество товара не зависит от того, на каком предприятии он был произведен, потребители не различают товары, изготовленные на разных предприятиях.

*ойро – денежная единица маленькой страны.

1. Какое количество очень нужного товара будет произведено каждым предприятием?
2. Производство единицы очень нужного товара на предприятии №1 сопровождается одной условной единицей очень вредных загрязняющих выбросов, экологи бьют тревогу, требуя ввести штраф T ойро за каждую условную единицу загрязняющих выбросов. Правительство понимает недопустимость сокращения объема производства очень нужного товара, поэтому предлагает одновременно ввести субсидию S ойро за каждую единицу товара, произведенного по экологически чистой технологии. Минфин, чтобы избежать дополнительной нагрузки на бюджет, рассчитал такие ставки штрафа и субсидии, чтобы суммы собранных штрафов в точности хватало на выплату необходимой суммы субсидий. К какому снижению выбросов приведет реализация предложений Минфина?
3. Экологи считают, что для того, чтобы экологическая ситуация начала улучшаться, необходимо минимум в 2 раза большее сокращение вредных выбросов, чем то, которое достижимо при реализации предложений Минфина. Минфин, понимая, что при большем сокращении загрязнений сумма выплачиваемых субсидий превысит сумму поступлений от штрафов, предупреждает, что на оплату предоставляемых субсидий он сможет выделить не более 200 млн ойро. За развитием ситуации с тревогой следит директор фирмы, пытаясь предугадать возможные изменения прибыли при введении штрафов и субсидий. Развейте тревоги директора, проведя необходимые расчеты и определите диапазон возможного изменения его прибыли, когда экологи, Минфин и Правительство достигнут компромисса и примут решение.

Задача 4. Волшебный горшочек

В царстве Кощеевом был найден волшебный бездонный горшочек, который, если поместить в него в течение дня некоторую (любую) сумму золотых монет, в конце дня выдаст сумму в десять раз большую. Но беда – горшочек способен работать лишь три дня, а потом становится обычным горшком.

Царь Кощей, будучи в хорошем настроении, пригласил всех сказочных жителей, которых в царстве ровно сотня, на двухдневный съезд, чтобы они, взяв с собой ровно по 100 золотых монет, смогли «подзаработать». Третий день работы горшочка царь посвятит умножению своего злата.

На съезде жители договорились, что каждый из них в начале дня подойдет к горшочку один раз и положит в него золотые монеты (каждый житель может вложить любое количество своих золотых монет или не положить ничего), а в конце дня все монеты, которые горшочек выдаст, будут поделены поровну между всеми жителями.

1. Если каждый сказочный житель заботится только о своем кошельке, то какую, по вашему мнению, оптимальную стратегию вложений в горшочек он выберет? Каким будет количество монет у каждого жителя в конце первого дня съезда? Ответы поясните.

2. Реализовав стратегию пункта (1) и посмотрев на свое количество монет в конце первого дня, сказочные жители остались недовольны, а царь Кощей был особенно недоволен тем, что его подданные так бездарно потеряли один день, который он мог бы использовать на преумножение своего злата, если бы предвидел, что его подданные такие неразумные.

Поэтому в начале второго дня на съезде царь объявил: «Каждый должен положить в горшочек не меньше A золотых монет. Тот, кто вложит меньшую сумму, должен заплатить штраф 45 золотых монет», и попросил своего любимого советника Змея Горыныча следить и штрафовать. Если Горыныч заметил (а он все замечает – у него же три пары глаз), что житель положил меньше назначенной суммы, то штраф волшебным образом сразу взимается с жителя в Кощеев сундук. Какое максимальное значение может принимать A , чтобы, следуя своей оптимальной стратегии, жители вкладывали в горшочек ненулевое количество монет. Сколько при этом золотых монет будет в конце второго дня у каждого жителя при условии, что они по-прежнему руководствуются своими личными интересами?

3. Определите, какой штраф должен был бы назначить Кощей, чтобы жители получили максимально возможное количество золотых монет от горшочка во второй день? Чему равен этот максимум?

Задача 5. Загрузка самолета

К владельцу небольшого частного самолета обратились два предпринимателя (X и Y) с просьбой доставить их грузы из пункта A и пункт B . Общий вес груза, который хочет отправить предприниматель X , составляет 15 тонн, и за доставку каждой тонны груза X он готов заплатить 90 тугриков. У предпринимателя Y 12 тонн груза, готового к отправке, и за доставку каждой тонны своего груза он готов заплатить 100 тугриков. Известно, что самолет может взять на борт до 18 тонн груза, при этом объем грузового отсека составляет всего 80 кубических метров. Объем, занимаемый одной тонной груза предпринимателя X , равен 4-м кубическим метрам, а предпринимателя Y – 5-ти кубическим метрам.

Самолету требуется топливо – керосин, при этом расход топлива при разной загрузке самолета различается: если общий вес груза 10 тонн и меньше то самолету на полет из пункта A в пункт B хватит 10 тонн керосина, а если общий вес груза больше 10 тонн, то нужно уже 20 тонн топлива. Керосин для полета нужно покупать у владельца аэропорта, по цене P_T тугриков за тонну, которую он устанавливает, руководствуясь своими интересами. Предполагается, что других расходов, кроме расходов на закупку топлива, у владельца самолета нет.

А) Владелец аэропорта очень хочет заполучить весь груз предпринимателя Х, однако тот готов продать ему только ту часть груза, которая останется после отправки самолета. Определите, какую цену на топливо стоит назначить владельцу аэропорта, чтобы весь груз Х достался ему.

Б) Если цена на топливо будет установлена на уровне 74 тугрика за тонну, то сколько груза от каждого из предпринимателей будет доставлено в пункт Б, и какую прибыль от этого полета получит владелец самолета?

В) В условиях предыдущего пункта, когда владелец самолета практически принял решение о том, как загрузить самолет, обеспечивая себе при этом получение максимальной прибыли, из пункта Б пришла радиограмма, что груз от предпринимателя Х срочно требуется жителям этого населенного пункта, поэтому этого груза следует привезти в количестве не меньшем, чем груза от предпринимателя У. Потерю прибыли, если она будет, владельцу самолета обещано компенсировать из бюджетных средств. Рассчитайте, как следует загрузить самолет, учитывая просьбу жителей поселка Б, и какую прибыль теперь может получить владелец самолета.

Г) Оцените, каким должен быть размер компенсации потери прибыли.