

2 ТУР ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. ЗАДАЧИ. 10 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае - меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1 (20 баллов) «Молодильные яблоки в Тридесятом царстве»

Старый Царь отправил своих сыновей Ивана и Степана на ярмарку в Тридесятое царство за молодильными яблоками. Царь заказал 5 яблок, а спрос князей и бояр, которые также сделали заказ на чудо-яблоки – 35 яблок. Спрос жителей Тридесятого царства и других гостей ярмарки на молодильные яблоки имеет вид: $Q_d = 570 - 5P$. Предложение яблок в Тридесятом царстве абсолютно неэластично: $Q_s = 400$, где P – цена одного яблока, злотиков, Q – количество яблок, штук.

У Ивана было 800 грошиков, а у Степана в 4 раза больше. На границе Тридесятого царства Баба Яга меняет грошики на местную валюту – злотики, причем берет за обмен пошлину в размере 10% от суммы обмена. Валютный курс составляет 0,5 злотиков за один грошик.

А) Определите цену, по которой продаются молодильные яблоки на ярмарке Тридесятого царства. **(8 баллов)**

Б) Хватит ли у братьев денег на покупку молодильных яблок? **(6 баллов)**

В) Прогуливаясь по ярмарке братья увидели лавку с живой водой, которая продавалась по цене 5 злотиков за 100 мл. Какой объем живой воды смогут купить Иван и Степан, если у них еще останутся деньги после покупки молодильных яблок? **(3 балла)**

Г) Если Иван и Степан не будут покупать живую воду, то сколько грошиков они смогут обменять у Бабы Яги на обратной дороге. Курс изменился и составил 0,4 злотиков за один грошик? **(3 балла)**

Решение:

А) Определим рыночный спрос на молодильные яблоки:

$Q_d \text{ рыночный} = 570 - 5P + 5 + 35 = 610 - 5P$. **(5 баллов)**

Определим равновесную цену на молодильные яблоки на ярмарке:

$$610 - 5P = 400$$

$P = 42$ злотика – равновесная цена молодильных яблок. **(3 балла)**

Б) $800 + 800 \cdot 4 = 4000$ грошиков – всего было у Ивана и Степана. **(1 балл)**

$4000 \cdot 0,5 = 2000$ злотиков – обменяла Баба Яга по курсу.

$2000 \cdot 10\% = 200$ злотиков – пошлина за обмен валюты.

$2000 - 200 = 1800$ злотиков – сумма денег у Ивана и Степана для покупки молодильных яблок. **(3 балла)**

$1800 : 42 = 42,8$ яблока – можно купить на ярмарке на имеющиеся деньги.

$5 + 35 = 40$ яблок – общий спрос на молодильные яблоки Царя, князей и бояр.

Следовательно, денег для покупки у братьев хватит. **(2 балла за расчет и вывод)**

В) $40 \cdot 42 = 1680$ злотиков – потратили Иван и Степан на покупку молодильных яблок.

$1800 - 1680 = 120$ злотиков – осталось у братьев после покупки. **(1 балл)**

$120 : 5 \cdot 100 = 2400$ мл или 2,4 литра – живой воды смогут купить братья. **(2 балла)**

Г) $120 : 0,4 = 300$ грошиков – обменяла Баба Яга по курсу. **(1 балл)**

$300 \cdot 10\% = 30$ грошиков – пошлина за обмен валюты.

$300 - 30 = 270$ грошиков – сумма денег у братьев после обмена. **(2 балла)**

Ответ: А) 42 злотика;

Б) денег для покупки молодильных яблок хватит;

В) 2400 мл или 2,4 литра;

Г) 270 грошиков.

Задача 2 (20 баллов) «В мастерской Деда Мороза»

В мастерской Деда Мороза в течение рабочей недели снеговики Миша и Гриша изготавливают лыжи и санки. Миша за это время может сделать 10 пар лыж или 16 санок, а Гриша – 9 пар лыж или 12 санок. По совету Деда Мороза снеговики решили объединить свои усилия, чтобы успеть выполнить все заказы к Новому году.

А) Постройте общую КПП снеговиков. **(6 баллов)**

Б) Из резиденции Деда Мороза поступил срочный заказ на 20 санок. Какое максимальное количество лыж смогут сделать снеговики, выполняя этот заказ? **(4 балла)**

В) Чему равны альтернативные затраты производства первых десяти санок; четырнадцати пар лыж? **(10 баллов)**

Решение:

А) Для удобства представим данные в виде таблицы.

Снеговики	Лыжи	Санки	Альтернативная стоимость	Альтернативная стоимость
-----------	------	-------	--------------------------	--------------------------

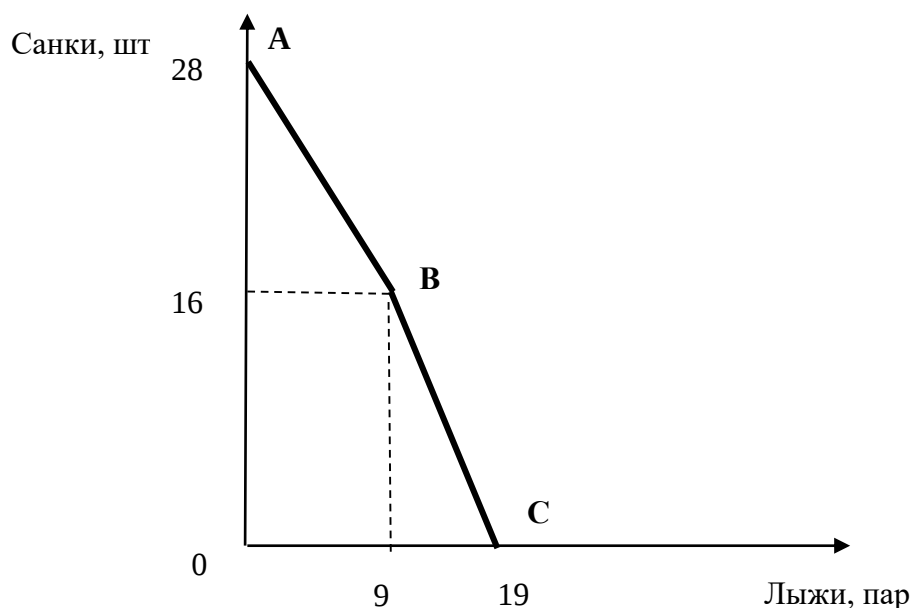
			1 пары лыж (количество санок)	1 санок (пары лыж)
Миша	10	16	$8/5 = 1,6$	$5/8$
Гриша	9	12	$4/3 = 1,33$	$3/4 = 0,75$
Итого:	19	28		

Наименьшее значение альтернативной стоимости изготовления лыж имеет Гриша, следовательно, именно он должен изготавливать лыжи первым, затем к нему присоединится Миша, т.к. он делает лыжи с наибольшим значением альтернативной стоимости изготовления лыж. Миша начинает работу с изготовления санок. **(за расчет альтернативной стоимости для каждого снеговика и верный вывод 2 балла)**

Построим КПВ снеговиков. Для этого составим таблицу.

	A	B	C
Лыжи	0	9	19
Санки	28	16	0

Перенесем данные таблицы на график **(4 балла)**.



Б) Для того, чтобы выполнить срочный заказ Миша будет делать санки все время и изготовит 16 санок. 4 оставшихся санок будет делать Гриша, однако не все время, а только то, что требуется на изготовление 4 санок. Альтернативная стоимость изготовления 1 санок для Гриши составляет $\frac{3}{4}$ пары лыж, следовательно, в оставшееся время он мог бы сделать 4 санок или 3 пары лыж. Таким образом, Гриша сможет сделать только 6 пар лыж ($9 - 3$). **(4 балла за верный ответ, подкрепленный выводом и/или расчетом)**

В) Десять санок будет делать Миша, альтернативная стоимость производства первых десяти санок равна 6,25 пар лыж ($10 \cdot 5/8 = 6,25$). **(4 балла)**

Из четырнадцати пар лыж 9 пар будут сделаны Гришей, остальные 5 пар Мишей. Альтернативные затраты производства 14 пар лыж будут складываться из альтернативных затрат 9 пар лыж, сделанных Гришей, т.е. 12 санок ($9 \cdot 4/3 = 12$), и альтернативных затрат 5 пар лыж, сделанных Мишей, т.е. 8 санок ($5 \cdot 8/5 = 8$). Таким

образом, альтернативные затраты производства 14 пар лыж равны 20 санкам. **(6 баллов)**

- Ответ:** А) построение КПВ;
Б) 6 пар лыж;
В) 6,25 пар лыж; 20 санок.

Задача 3 (20 баллов) «Богатства Кощея»

Кощей Бессмертный хранил свои богатства в двух пещерах на Черной горе, в каждой из которых было 60 мешков валюты, при этом в 21 мешке были тугрики, а в остальных багрики. Соловей-Разбойник охранял богатства Кощея в первой пещере, а Тугарин Змей во второй. За хранение одного мешка с тугриками Кощей платил 2 золотых в месяц, а за хранение одного мешка с багриками 5 золотых в месяц.

А) Сколько мешков с тугриками и багриками было в каждой пещере, если известно, что в первой пещере на один мешок с тугриками приходилось в три раза больше мешков с багриками, чем во второй. **(18 баллов)**

Б) Сколько зарабатывают за месяц Соловей-Разбойник и Тугарин Змей за выполнение своей работы? **(2 балла)**

Решение:

А) Для удобства представим условие задачи в таблице.

1 пещера	2 пещера
Всего 60 мешков	Всего 60 мешков
Пусть x – количество мешков с тугриками	$(21 - x)$ – количество мешков с тугриками
$(60 - x)$ – количество мешков с багриками	$60 - (21 - x) = 39 + x$ – количество мешков с багриками

Запишем соотношение между запасами мешков с тугриками и багриками в пещерах по условию задачи. **(5 баллов за правильное составление соотношения)**

$$x/(60-x):(21-x)/(39+x) = 1:3$$

$$x/(60-x)*(39+x)/(21-x) = 1/3$$

$$x(39+x)/(60-x)(21-x) = 1/3$$

$$(39x + x^2)/(1260 - 81x + x^2) = 1/3$$

$$117x + 3x^2 = 1260 - 81x + x^2$$

$$2x^2 + 198x - 1260 = 0$$

$$x^2 + 99x - 630 = 0$$

$$D = 9801 - 4*(-630) = 12321$$

$$x = (-99+111)/2 = 6 \text{ мешков с тугриками было в первой пещере.}$$

(5 баллов за составление и 5 баллов за решение квадратного уравнения)

$$21 - 6 = 15 \text{ мешков с тугриками было во второй пещере. (1 балл)}$$

$$60 - 6 = 54 \text{ мешка с багриками было в первой пещере. (1 балл)}$$

$$39 + 6 = 45 \text{ мешков с багриками было во второй пещере. (1 балл)}$$

$$\text{Б) } 6*2 + 54*5 = 282 \text{ золотых – заработок Соловья-Разбойника. (1 балл)}$$

$$15*2 + 45*5 = 255 \text{ золотых – заработок Тугарина Змея. (1 балл)}$$

Ответ: А) в первой пещере 6 мешков с тугриками и 54 мешка с багриками; во второй пещере 15 мешков с тугриками и 45 мешков с багриками.

Б) 282 золотых; 255 золотых.

Задача 4 (20 баллов) «Квартира для Незнайки»

В последнее время Незнайка неплохо зарабатывает на рисовании портретов коротышек и сочинительстве сатирических куплетов. Незнайка мечтает о собственной квартире в Цветочном городе, которая стоит 2 млн. лепестков. Незнайка может её купить, взяв кредит в ЛунаБанке. Банк готов выдать необходимую сумму сразу, даже без первоначального взноса, а погашать кредит Незнайке придётся 20 лет равными ежемесячными платежами, размер которых не превышает доход Незнайки за месяц. При этом за весь срок кредита ему придётся выплатить сумму, на 260% превышающую исходную.

Знайка посоветовал Незнайке какое-то время снимать квартиру за 14 тыс. лепестков в месяц, откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съёмную квартиру.

А) За сколько месяцев Незнайка сможет накопить на квартиру, если примет предложение Знайки, а стоимость квартиры не изменится? (10 баллов)

Б) Незнайка принял предложение Знайки. Спустя 1 год Знайка дал еще один совет: положить накопления на вклад в ЛунаБанк под 20% годовых. Проценты по вкладу начисляются один раз в год после истечения года и прибавляются к основной сумме вклада. Так же вкладчик имеет право докладывать в конце каждого года после начисления процентов на счет фиксированную сумму в размере первоначального вклада. Как в этом случае изменится срок накопления на квартиру? (10 баллов)

Решение:

А) $2 \cdot 360\% = 7,2$ млн лепестков – общая сумма выплат банку за 20 лет. (2,5 балла)

$7200000:20:12 = 30\,000$ лепестков – ежемесячный платеж банку по кредиту. (2,5 балла)

$30\,000 - 14\,000 = 16\,000$ лепестков – может откладывать Незнайка по совету Знайки ежемесячно. (2,5 балла)

$2000000:16\,000 = 125$ месяцев – срок накопления на квартиру самостоятельно. (2,5 балла)

Б) $16000 \cdot 12 = 192000$ лепестков – накопленная Незнайкой сумма за год, которую он, по совету Знайки решил положить в ЛунаБанк, сумма ежегодных дополнительных взносов. (1 балл)

Представим расчеты в таблице:

Год	Сумма на счете на начало года	Начисленные проценты	Дополнительный взнос	Сумма на счете на конец года
1	192	$192 \cdot 0,2 = 38,4$	192	422,4
2	422,4	$422,4 \cdot 0,2 = 84,48$	192	698,88
3	698,88	$698,88 \cdot 0,2 = 139,776$	192	1030,656
4	1030,656	$1030,656 \cdot 0,2 = 206,1312$	192	1428,7872
5	1428,7872	$1428,7872 \cdot 0,2 = 285,7574$	192	1906,5446

Всего за 6 лет (72 месяца) накопления Незнайки составили 1906545 лепестков. **(5 баллов)**

$2000000 - 1906545 = 93455$ лепестков – недостающая сумма для приобретения квартиры. **(1 балл)**

$93455 : 16000 = 5,8$ или 6 месяцев – осталось Незнайке сделать накопления для получения необходимой суммы. **(1 балл)**

$72 + 6 = 78$ месяцев – новый срок накопления необходимой суммы на покупку квартиры. **(1 балл)**

$125 - 78 = 47$ месяцев – срок накопления на квартиру для Незнайки уменьшится. **(1 балл)**

Ответ: А) 125 месяцев; Б) уменьшится на 47 месяцев.

Задача 5 (20 баллов) «Шоколадная история в стране Сладкоежек»

Любимым товаром жителей страны Сладкоежек являются шоколадные батончики, производство которых в стране является стратегически важным. Функция рыночного спроса на шоколадные батончики имеет вид: $Q_d = 40 - 2P$, где P – цена за один батончик, грошиков; Q_d – объем спроса, тысяч батончиков в месяц. Фирма–производитель шоколадных батончиков «Шоколадница» широко известна на рынке и уже много лет выпускает батончики с разными вкусами. Функция общих затрат фирмы «Шоколадница» имеет вид: $TC = 0,04Q^3 - 1,94Q^2 + 32,96Q$.

А) Определите оптимальный объем производства и финансовый результат деятельности фирмы «Шоколадница» в сложившихся условиях. **(10 баллов)**

Б) Представьте результат решения графически. **(10 баллов)**

Решение:

А) Функция спроса на шоколадные батончики имеет линейную зависимость $Q_d(p) = b - aP$, что соответствует рынку несовершенной конкуренции.

Условие выбора оптимального объема производства фирмы на рынках несовершенной конкуренции (максимизация прибыли, минимизация убытков) – равенство предельного дохода и предельных издержек: $MC = MR$.

Запишем обратную функцию спроса на шоколадные батончики: $P = 20 - 0,5Q$. **(1 балл)**

Тогда совокупный доход фирмы будет равен: $TR = PQ = (20 - 0,5Q)Q = 20Q - 0,5Q^2$. **(1 балл)**

Предельный доход равен первой производной совокупного дохода.

$MR = TR' = (20Q - 0,5Q^2)' = 20 - Q$. **(1 балл)**

Функция предельных издержек – производная функции общих издержек по Q : $MC = TC' = (0,04Q^3 - 1,94Q^2 + 32,96Q)' = 0,12Q^2 - 3,88Q + 32,96$. **(1 балл)**

Таким образом: $20 - Q = 0,12Q^2 - 3,88Q + 32,96$

$20 - Q - 0,12Q^2 + 3,88Q - 32,96 = 0$

$-0,12Q^2 + 2,88Q - 12,96 = 0$

$Q^2 - 24Q + 108 = 0$

$D = 576 - 4 \cdot 108 = 144$

$Q_1 = 6$ тысяч батончиков

$Q_2 = 18$ тысяч батончиков

То есть, оптимальный объем выпуска для фирмы «Шоколадница» выполняется при двух значениях объема выпуска 6 и 18 тысяч батончиков в месяц. **(2 балла)**

Продажа будет осуществляться по ценам:

$$P_1 = 20 - 0,5 \cdot 6 = 17 \text{ грошиков}$$

$$P_2 = 20 - 0,5 \cdot 18 = 11 \text{ грошиков}$$

Размер полученной фирмой прибыли составит:

$$Pr = TR - TC = P \cdot Q - 0,04Q^3 + 1,94Q^2 - 32,96Q$$

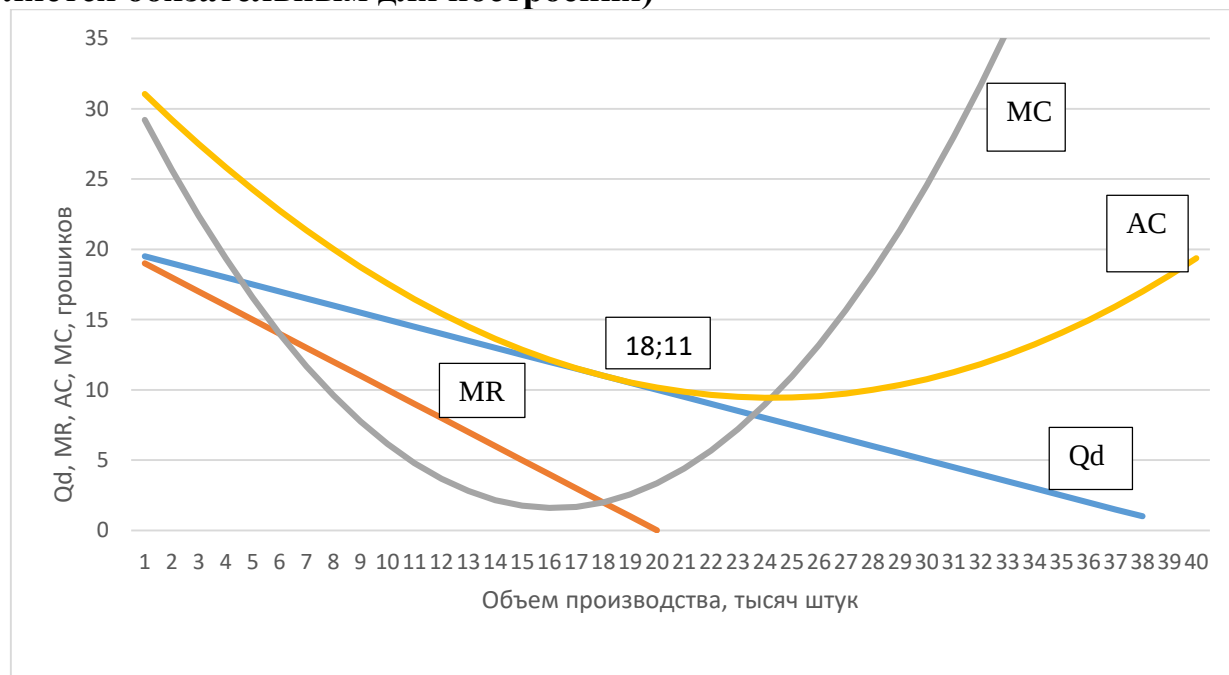
$$Pr_1 = 6 \cdot 17 - 0,04 \cdot 6^3 + 1,94 \cdot 6^2 - 32,96 \cdot 6 = -34,56 \text{ тысяч грошиков}$$

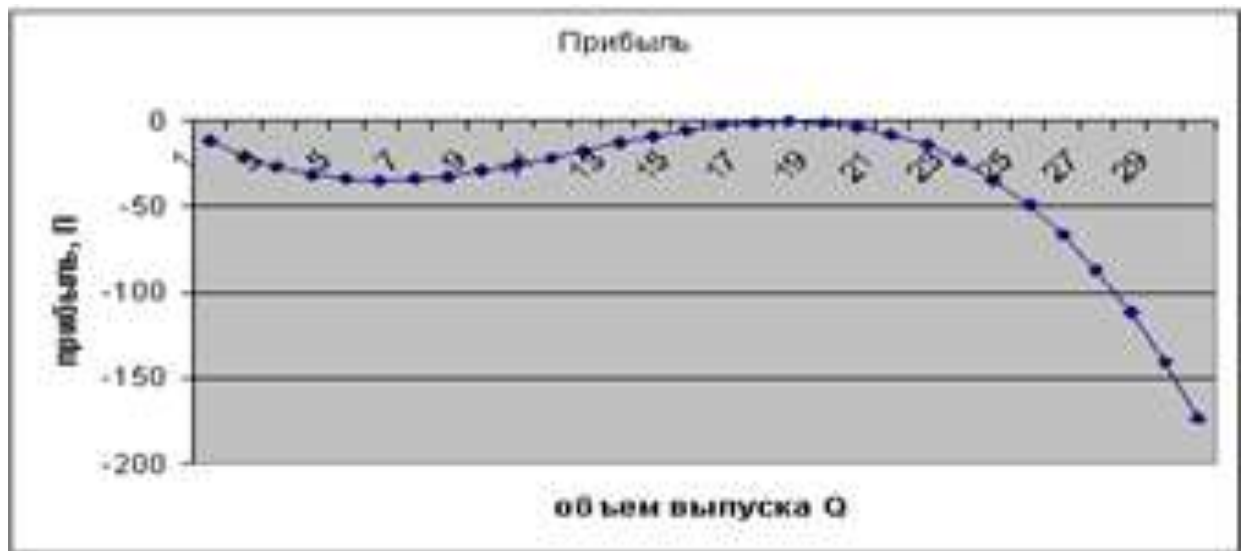
$$Pr_2 = 18 \cdot 11 - 0,04 \cdot 18^3 + 1,94 \cdot 18^2 - 32,96 \cdot 18 = 0 \text{ (2 балла за расчет}$$

финансового результата деятельности фирмы)

Таким образом, функция прибыли имеет два экстремума, как это видно из графика (локальный минимум и максимум функции), естественно в данной ситуации нас интересует максимум, т.е. $Pr = 0$. Оптимальный объем выпуска в данном случае $Q = 18$ тысяч батончиков. При выпуске данного объема продукции фирма «Шоколадница» не получит прибыли, но не понесет и убытка. При данных функциях спроса и издержек получение прибыли не представляется возможным. **(2 балла за вывод и верный ответ)**

Б) Представим результат решения на графике. **(10 баллов, график прибыли не является обязательным для построения)**





Ответ: А) 18 тысяч батончиков, $Pr = 0$;
Б) построение графика.