Комплекс предметов «химия, физика, математика, биология» для школьников 10 – 11 классов (заключительный этап) Математика. Вариант III. Решения

Решение задачи 1. РНК и вероятность (5 баллов)

Общее число синтезированных фрагментов равно произведению числа способов выбрать положение двух нуклеотидов **C** во фрагменте РНК длиной 2 + 4 + 3 = 9 нуклеотидов и числа способов выбрать положение четырех нуклеотидов **U** на оставшихся 9 − 2 = 7 позициях:

$$\mathbf{N} = C_9^2 \cdot C_7^4 = \frac{9!}{2!(9-2)!}\cdot\frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{9!}{2!3!4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot7\cdot4\cdot9 = 1260$$

Следовательно, вероятность выбрать из **N** вариантов структуры одну конкретную составляет:

$$\mathbf{P} = 1/\mathbf{N} = 1/1260 = 10000/1260\cdot10^{-4} = 7{,}9\cdot10^{-4}$$

Решение задачи 2. Гибридный дендример (5 баллов)

1. Рассмотрим синтез полимера поэтапно.

   1 этап: как описано в условии, к центральному звену **A** присоединяется три звена **B**.

   Общее число звеньев каждого типа при этом

   $$\mathbf{N_{B1}} = 3,\ \mathbf{N_{C1}} = 0.$$

   2 этап: к трем звеньям **B**, присоединенным на этапе 1, присоединяется 6 новых звеньев, 3 звена **B** и 3 звена **C**. Общее число звеньев каждого типа при этом

   $$\mathbf{N_{B2}} = 3 + 3 = 6,\ \mathbf{N_{C2}} = 0 + 3 = 3.$$

   3 этап:

   - к трем звеньям **B**, присоединенным на этапе 2, присоединяется 6 новых звеньев, 3 звена **B** и 3 звена **C**;
   - к 3 звеньям **C**, присоединенным на этапе 2, присоединяются еще 3 звена **C**.

   Общее число звеньев каждого типа при этом

   $$\mathbf{N_{B3}} = 6 + 3 = 9,\ \mathbf{N_{C3}} = 3 + (3 + 3) = 9.$$

   Всего на третьем этапе присоединяется

   $$\mathbf{M_3} = 3 + 6 = 3\cdot3 = 9 \text{ звеньев.}$$

4 этап:

- к трем звеньям **B**, присоединенным на этапе 3, присоединяется 6 новых звеньев, 3 звена **B** и 3 звена **C**;
- к шести звеньям **C**, присоединенным на этапе 3, присоединяются еще 6 звеньев **C**.

Общее число звеньев каждого типа при этом

$$\mathbf{N}_{B4} = 9 + 3 = 12,\ \mathbf{N}_{C4} = 9 + (3 + 6) = 18.$$

Всего на четвертом этапе присоединяется

$$\mathbf{M}_4 = 3 + 9 = 3\cdot 4 = 12 \text{ звеньев.}$$

n этап:

- к трем звеньям **B**, присоединенным на этапе **n** – 1, присоединяется 6 новых звеньев, 3 звена **B** и 3 звена **C**;
- всего на этапе присоединяется $\mathbf{M}_n = 3\mathbf{n}$ звеньев,
- таким образом, общее число звеньев **C**, присоединенных на данном этапе, равно
  $\mathbf{M}_n - 3 = 3\mathbf{n} - 3$ (разность общего числа звеньев и числа звеньев **B**).

Общее число звеньев каждого типа при этом

$$\mathbf{N}_{Bn} = 3\mathbf{n},\ \mathbf{N}_{Cn} = \sum_1^n (3k-3) = 3\sum_1^n k - 3n = 3n(n+1)/2 - 3n = 1{,}5\mathbf{n}(\mathbf{n}-1).$$

2. До какого номера этапа включительно доля звеньев **B** среди всех звеньев, составляющих полимер, будет больше 5%? **(1,5 балла)** При расчете доли звеньев **B** в полимере наличием центрального звена **A** пренебречь.

3. Доля звеньев **B** на **n**-м этапе синтеза равна

$$\omega = \frac{N_{Bn}}{N_{Bn} + N_{CBn}} = \frac{3n}{1{,}5n(n+1)} = \frac{2}{n+1}.$$

Составим неравенство:

$$2/(\mathbf{n}+1) \geq 5/100$$

$$\mathbf{n} + 1 \leq 200/5$$

$$\mathbf{n} \leq 40 - 1$$

$$\mathbf{n} \leq 39$$

$$\mathbf{n} = 39.$$

Решение задачи 3. Липосомы (5 баллов)

Рассчитаем объем липида, идущий на формирование одной липосомы радиуса **R** и толщиной липидной стенки **d**:

$$\mathbf{V}_{L1} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3-(R-d)^3\right)=\frac{4}{3}\pi\left(3R^2d-3Rd^2+d^3\right)$$

Тогда для липосом в первой и во второй колбе

$$\mathbf{V}_{L1}(1) = \frac{4}{3}\cdot 3{,}1\left(3\cdot 40^2\cdot 4-3\cdot 40\cdot 4^2+4^3\right) = 7{,}2\cdot 10^4 \text{ нм}^3,$$

$$\mathbf{V}_{L1}(2) = \frac{4}{3}\cdot 3{,}1\left(3\cdot 80^2\cdot 4-3\cdot 80\cdot 4^2+4^3\right) = 3{,}0\cdot 10^5 \text{ нм}^3.$$

Следовательно, из $\mathbf{V}_L$ = 0,2 мл липида можно получить

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_L/\mathbf{V}_{L1} = \frac{V_L}{\frac{4}{3}\pi\left(3R^2d-3Rd^2+d^3\right)} \text{ липосом.}$$

В первой колбе **N** (1) = $0{,}2/7{,}2\cdot 10^4 = 2{,}8\cdot 10^{15}$ липосом.

Во второй колбе **N** (2) = $0{,}2/3{,}0\cdot 10^5 = 6{,}6\cdot 10^{14}$ липосом.

По определению, объемная доля **N** липосом радиуса **R** в суммарной смеси равна

$$\omega = \frac{NV'_L}{V_0+V_L}\cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi NR^3}{V_0+V_L}\cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{V_0+V_L}\cdot\frac{V_L}{\frac{4}{3}\pi\left(3R^2d-3Rd^2+d^3\right)}\cdot 100\%,$$

где $\mathbf{V'}_L$ – объем, занимаемый одной липосомой в растворе.

Объем, занимаемый одной липосомой в первой колбе $\mathbf{V'}_L(1) = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = 2{,}6\cdot 10^5$ нм^3.

Объем, занимаемый одной липосомой во второй колбе $\mathbf{V'}_L(2) = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = 2{,}1\cdot 10^5$ нм^3.

и

Объемная доля липосом в первой колбе $\boldsymbol{\omega}_1 = 2{,}8\cdot 10^{15}\cdot 2{,}6\cdot 10^5/(100{,}2\cdot 10^{21}) = 0{,}73$,

объемная доля липосом во второй колбе $\boldsymbol{\omega}_2 = 6{,}6\cdot 10^{14}\cdot 2{,}1\cdot 10^6/(100{,}2\cdot 10^{21}) = 1{,}40$.

Тогда их соотношение составляет

$$\boldsymbol{\omega}_2/\boldsymbol{\omega}_1 = 1{,}40/0{,}73 = 1{,}9$$

Или, в общем виде,

$$\omega = \frac{V_L}{V_0 + V_L} \cdot \frac{R^3}{\left(3R^2 d - 3Rd^2 + d^3\right)} \cdot 100\%$$

Объемная доля липосом в первой колбе **ω_1** = 0,74,

объемная доля липосом во второй колбе **ω_2** = 1,40

и

их соотношение **ω_2/ω_1** = 1,40/0,74 = 1,9.

Решение задачи 4. Развертка фуллерена (10 баллов)

1. Число вершин в многограннике, отвечающем фуллерену **X**:

   4·22 (шестиугольник в **A**) + 4·9 (треугольник в **A**) = 124.

   Число шестиугольных граней в многограннике, отвечающем фуллерену **X**:

   4·(6 + 6/2) (шестиугольник в **A**) + 4·(1 + 6/2) (треугольник в **A**) = 52.

2. Многогранник **Y** имеет форму усеченного тетраэдра. У него

   - 4 треугольных грани (образованы на месте отсечения вершин «исходного» тетраэдра),
   - 4 шестиугольных грани (образованы на месте граней «исходного» тетраэдра),
   - 6 ребер типа I (ребра «исходного» тетраэдра),
   - 12 ребер типа II (ребра, образовавшиеся при формировании треугольных граней).

3. В многограннике **Y** шесть ребер типа I расположены в пространстве симметрично.

   При соединении центров этих ребер образуется многогранник, имеющий 6 вершин, 8 правильных треугольных граней и 12 ребер — это *октаэдр*.

4. По условию, развертка любого фуллерена из рассматриваемого ряда задается парой чисел, определяющих взаимное расположение концов ребер второго типа. Рассматривая рисунок 1 условия, можно установить, что любое такое ребро можно задать парой (**n**, 0), поскольку, исходя из ориентации развертки относительно графеновых шестиугольников, один из параметров для него всегда равен 0.

   Анализируя рисунок 1 условия, можно установить, что на треугольную грань многогранника **Y** приходится

$$\mathbf{N_3}(\mathbf{n}) = \sum_{1}^{n}(2k-1) = n(n+1)-1 = \mathbf{n}^2 \text{ атомов углерода.}$$

Рассматривая шестиугольную грань **Y** как треугольник со стороной (**n** + 2) атомов углерода, у которого отсекли три малых треугольника со стороной (1, 0), получаем общую зависимость

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}, 0) = 4\cdot\mathbf{N_6}(\mathbf{n}) + 4\cdot\mathbf{N_3}(\mathbf{n}) = 4\cdot(\mathbf{N_3}(\mathbf{n} + 2) - 3\cdot\mathbf{N_3}(1)) + 4\cdot\mathbf{N_3}(\mathbf{n}).$$

Подставляя полученное ранее выражение для $\mathbf{N_3}(\mathbf{n})$, получаем

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}, 0) = 4\cdot((\mathbf{n} + 2)^2 - 3\cdot1^2) + 4\cdot\mathbf{n}^2 = 4\cdot(2\mathbf{n}^2 + 4\mathbf{n} + 1) = 8\mathbf{n}^2 + 16\mathbf{n} + 4.$$

5. (3, 0).

6. Самым маленьким членом рассматриваемого ряда будет фуллерен, задаваемый парой (1, 0):

$$\mathbf{N}(1, 0) = 8 + 16 + 4 = 28.$$