Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 1. Телескоп «Джеймс Уэбб»

1. Наиболее точной оценкой диаметра окружности, описанной вокруг плоской структуры из 18 равносторонних шестиугольников, будет длина диагонали прямоугольника, одна из сторон которого равна стороне шестиугольника, а вторая – пяти длинам малой диагонали шестиугольника:

$$\sqrt{A^2+\left(5A\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(0{,}76\right)^2+\left(5\cdot 0{,}76\sqrt{3}\right)^2} = 6{,}63 \text{ м.}$$

2.

1) Рассчитаем площадь, покрытую золотом:

$$\mathbf{S} = 18\cdot\mathbf{S}_{\mathbf{6уг}} = 18\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}A^2=27\sqrt{3}\cdot 76^2 = 270117 \text{ см}^2 = 27 \text{ м}^2.$$

Тогда объем золота составляет

$$\mathbf{V} = 27\cdot100\cdot10^{-9} = 2{,}7\cdot10^{-6} \text{ м}^3 = 2{,}7 \text{ см}^3$$

Что отвечает массе

$$\mathbf{m} = \mathbf{V\rho} = 2{,}7\cdot19{,}25 = 52{,}11 \text{ г.}$$

2) Объему 2,7 см^3 отвечает шар диаметром 1,73 см.

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 2. Призма

1.

1) В качестве первого шага решения выразим длины сторон первой группы квадратов, $\mathbf{x} + 1$ и $2\mathbf{x} + 1$, через длины сторон второй группы квадратов, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, соответственно. Для этого введем следующие обозначения: $\mathbf{d} = \mathbf{x} + 1$, $\mathbf{e} = 2\mathbf{x} + 1$. С одной стороны, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{d}^2 + \mathbf{e}^2$,

   а с другой –

$$\mathbf{y}^2 = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)^2 = \mathbf{a}^4 + 2\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^4 = 4\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^4 - 4\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^4 = (2\mathbf{ab})^2 + (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^2$$
$$(\mathbf{a} > \mathbf{b})$$

   Тогда возможны два случая: $\mathbf{d} = 2\mathbf{ab}$, $\mathbf{e} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$ либо $\mathbf{d} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$, $\mathbf{e} = 2\mathbf{ab}$.

2) Запишем систему уравнений, отвечающую первому случаю.

   $\mathbf{x} + 1 = 2\mathbf{ab}$

   $2\mathbf{x} + 1 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$

   $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5$

   Выражая **b** через **a**, получаем

   $\mathbf{x} + 1 = 2\mathbf{a}(5 - \mathbf{a})$ $\quad$ $\mathbf{x} + 1 = 10\mathbf{a} - 2\mathbf{a}^2$ $\quad$ $\mathbf{x} = 10\mathbf{a} - 2\mathbf{a}^2 - 1$

   $2\mathbf{x} + 1 = \mathbf{a}^2 - (5 - \mathbf{a})^2$ $\quad$ $2\mathbf{x} + 1 = 10\mathbf{a} - 25$ $\quad$ $\mathbf{x} = 5\mathbf{a} - 13$

   Составим квадратное уравнение относительно **a**:

$$5\mathbf{a} - 13 = 10\mathbf{a} - 2\mathbf{a}^2 - 1$$

$$2\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{a} - 12 = 0$$

   Решая, получаем:

$$\mathbf{a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

   Поскольку длина ребра кластера не может быть отрицательной, то

$$\mathbf{a} = (5 + 11)/4 = 4.$$

   Тогда

$$\mathbf{b} = 5 - 4 = 1$$

$$\mathbf{x} = 5 \cdot 4 - 13 = 7$$

$$\mathbf{y} = 4^2 + 1^2 = 17$$

   и общее число атомов в кластере составляет $\mathbf{N} = 7 \cdot 17^2 = \underline{2023}$.

2. Запишем систему уравнений, отвечающую второму случаю.

$\mathbf{x} + 1 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$

$2\mathbf{x} + 1 = 2\mathbf{ab}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5$

Выражая **b** через **a**, получаем

$\mathbf{x} + 1 = \mathbf{a}^2 - (5 - \mathbf{a})^2$ $\quad \mathbf{x} + 1 = 10\mathbf{a} - 25$ $\quad \mathbf{x} = 10\mathbf{a} - 26$

$2\mathbf{x} + 1 = 2\mathbf{a}(5 - \mathbf{a})$ $\quad 2\mathbf{x} + 1 = 10\mathbf{a} - 2\mathbf{a}^2$ $\quad \mathbf{x} = 5\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 - 0{,}5$

Составим квадратное уравнение относительно **a**:

$$10\mathbf{a} - 26 = 5\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 - 0{,}5$$

$$\mathbf{a}^2 + 5\mathbf{a} - 25{,}5 = 0$$

Найдем значение дискриминанта:

$$\mathbf{D} = 25 + 4 \cdot 25{,}5 = 127,$$

что не является квадратом натурального числа, следовательно, данное квадратное уравнение не имеет решения в целых числах.

Таким образом, задача имеет единственное решение: **N** = 2023.

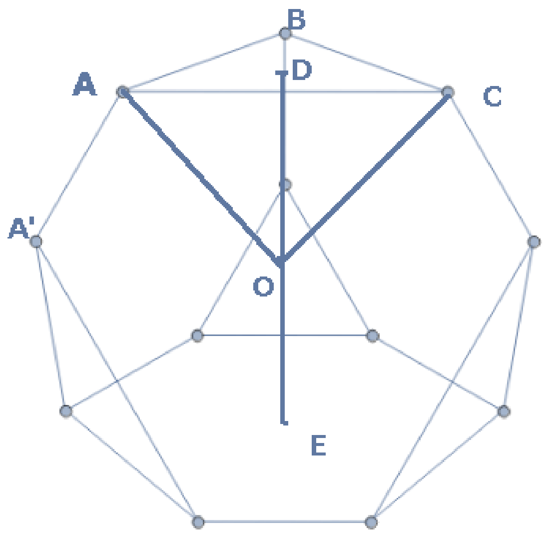
Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 3. Неканонический фуллерен

1. 4·(30 + 18/2) (шестиугольные грани) + 4·(6 + 12/2) (треугольные грани) = 204.

   4·(16 + 3/2) (шестиугольные грани) + 4·(4 + 3/2) (треугольные грани) = 92.

2. Центры пятиугольников образуют усеченный тетраэдр.

3. Рассмотрим многогранник, вершины которого лежат в центрах пятиугольников (обозначим его как **X**). Для решения задачи сделаем в нем некоторые дополнительные построения: проведем отрезок **DE**, соединяющий центр тяжести **ΔABC** с центром тяжести противолежащего ему шестиугольника:



Радиус сферы, описанной вокруг него, равен длине отрезка **OA** (см. рис.). Для нахождения этой величины рассмотрим прямоугольный Δ**AOD** и рассчитаем длины его катетов исходя из известных нам значений – длин рёбер **X**.

Длина ребра треугольной грани **X** составляет **AB** = **a** = 6·0,14 = 0,84 нм (шесть длин связей С–С, две стороны правильного шестиугольника и две больших диагонали), длина малого ребра шестиугольной грани **X** составляет **AA'** = **b** = 3·0,14 = 0,42 нм (три длины связи С–С, сторона правильного шестиугольника и его большая диагональ).

Тогда отрезок **AD** равен радиусу окружности, описанной вокруг Δ**ABC**:

$$\mathbf{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}49 \text{ нм}.$$

Многогранник **X** можно представить как тетраэдр **Y** с ребром **c** = 2**a** + **b** = 2,1 нм, от которого отсекли четыре тетраэдра **Z** с ребром **a**. Следовательно, высоту **X** можно вычислить как разность высот **Y** и **Z**:

$$\mathbf{DE} = \sqrt{2/3} \times c - \sqrt{2/3} \times a = \sqrt{2/3}\left(2{,}1 - 0{,}84\right) = 1{,}03 \text{ нм}.$$

В то же время, длина отрезка **OE** равна радиусу сферы, вписанной в **Y** (**O** – точка, равноудаленная от шестиугольных граней **X**)

$$\mathbf{OE} = \frac{c}{\sqrt{24}} = \frac{2{,}1}{\sqrt{24}} = 0{,}43 \text{ нм.}$$

Тогда **OD** = **DE** – **OE** = 1,03 – 0,43 = 0,6 нм.

Рассчитаем **AO** по теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{0{,}49^2 + 0{,}6^2} = 0{,}77 \text{ нм.}$$

Следовательно, размер **X** можно оценить как 2**AO** = 1,54 нм.

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 4. Конкурирующие штаммы

Для начала выведем в общем виде зависимость числа болеющих **M** от времени **t**:

В рамках рассматриваемой модели общее число людей, уже столкнувшихся с этим заболеванием, растет как геометрическая прогрессия, в которой общее число членов составляет ($\mathbf{n}$ + 1), где $\mathbf{n} = \mathbf{t}/\mathbf{T}$.

Тогда $\mathbf{M}(\mathbf{n})$ – это ($\mathbf{n}$ + 1)-й член данной прогрессии:

$\mathbf{M}(0) = \mathbf{Y}$ – число болеющих в начальный момент наблюдения.

$$\mathbf{M}(1) = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{YR}$$

$$\mathbf{M}(2) = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{YR}^2$$

…

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = \mathbf{YR}^{\mathbf{n}} \text{ и } \mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{YR}^{\mathbf{t/T}}$$

Тогда для каждого из штаммов:

$$\mathbf{M_А}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_А R_А}^{\mathbf{t/T}} \text{ и } \mathbf{M_Б}(\mathbf{t}) = \mathbf{Y_Б R_Б}^{\mathbf{t/T}}$$

и соотношение болеющих составляет

$$\frac{M_А(t)}{M_Б(t)} = \frac{Y_А R_А^{t/T}}{Y_Б R_Б^{t/T}} < \frac{1}{10}.$$

По условию, $\mathbf{Y_А}:\mathbf{Y_Б} = 10:1$, а $\mathbf{R_А}/\mathbf{R_Б} = 4/5$.

Тогда

$$\frac{Y_А}{Y_Б}\left(\frac{R_А}{R_Б}\right)^{t/T} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{10}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{t/6} < \frac{1}{10}$$

$$1{,}25^{t/6} > 100$$

$$\mathbf{t} > 6\log_{1,25}100$$

$$\mathbf{t} > 6\cdot 20{,}64$$

$$\mathbf{t} \geq 126 \text{ дней}$$

(поскольку в рамках дискретной модели **t** кратно 6).

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 5. В поисках нанотрубки

1.

1) Найдем, взаимосвязь между диаметром и индексами хиральности, (**n**, **m**).

   По условию, отрезок **OX** равен длине окружности УНТ, следовательно, ее диаметр можно найти по формуле **D** = **OX**/**π**.

   В свою очередь, длина отрезка **OX**, по теореме косинусов, составляет

   $$OX^2 = (nr)^2 + (mr)^2 - 2nr\cdot mr\cdot\cos(120°) = r^2(n^2 + m^2 - 2nm(-0{,}5)) = r^2(n^2 + nm + m^2),$$

   где **r** – длина единичного отрезка, равного расстоянию между центрами соседних шестиугольников:

   $$r = 2a\cos(30°) = a\sqrt{3} = 0{,}14\sqrt{3}.$$

   Следовательно, диаметр УНТ можно рассчитать по формуле

   $$D = \frac{0{,}14\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n^2+nm+m^2} = 0{,}077186\sqrt{n^2+nm+m^2}$$

   То есть,

   $$n^2 + nm + m^2 = \left(\frac{D}{0{,}077186}\right)^2.$$

   Тогда

   $$D = 2 \text{ нм},\ n^2 + nm + m^2 = 671{,}4,$$

   $$D = 3 \text{ нм},\ n^2 + nm + m^2 = 1510{,}6.$$

   Таким образом, все значения пар (**n**, **m**) (таких, что **n** ≥ **m**), должны удовлетворять условию

   $$672 \le n^2 + nm + m^2 \le 1510.$$

2) Минимальное значение индекса **n** соответствует случаю **m** = **n** (для одного и того же диаметра УНТ величина индексов хиральности тем меньше, чем ближе их значения друг к другу) и $n^2 + nm + m^2 \ge 672$ (минимальный диаметр):

   $$n^2 + n\cdot n + n^2 \ge 672$$

   $$n \ge 14{,}97$$

   Тогда

   $$n_{min} = 15.$$

3) Максимальное значение индекса **n** соответствует случаю **m** = 0 (для одного и того же диаметра УНТ величина одного из индексов хиральности тем больше, чем ближе значение второго к нулю) и $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \le 1510$ (максимальный диаметр):

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n}\cdot 0 + 0^2 \le 1510$$

$$\mathbf{n} \le 38{,}86$$

Тогда

$$\mathbf{n}_{max} = 38.$$

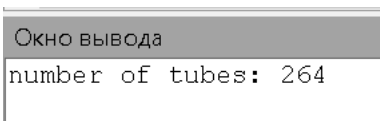
2. Очевидно, что нахождения всех пар индексов хиральности (**n**, **m**), удовлетворяющих условию, необходимо осуществить перебор всех возможных значений выражения $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2$ в цикле по **n** от $\mathbf{n}_{min}$ до $\mathbf{n}_{max}$ и во вложенном цикле по **m** от 0 до **n**, и посчитать, сколько из них удовлетворяют условию $672 \le \mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 \le 1510$.

Текст программы на языке Pascal

```
var
  n,m,d,tubes: integer;

begin
  tubes := 0;
  for n := 15 to 38 do
  begin
    for m := 0 to n do
    begin
      d := n*n + n*m + m*m;
     if (d >= 672) and (d <= 1510) then
       tubes := tubes + 1;
    end;
  end;
  writeln ('number of tubes: ', tubes);
end.
```

Всего 264 УНТ.



Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 6. Тетрикс

1. Единичные тетраэдры, содержащие **Cd** в центре, заполняют центральные полости четырех **S1**(**T2**), дополняя их до **T4**, то есть, всю структуру полого кластера $In_xCd_yS_z$ можно рассматривать как **S1**(**T4**).

2.

1) Обозначим общее число атомов металла в супертетраэдре как $\mathbf{N_M}$, атомов **S** – $\mathbf{N_S}$. Выведем зависимость общего числа атомов **M** и **S** в зависимости от номера поколения супертетраэдров **n**, формирующих тетрикс, а также от номера поколения последнего.

   При переходе от поколения к поколению в **Sm**(**Tn**) количество атомов **M** в тетриксе ($\mathbf{N_{MT}}$) каждый раз увеличивается в 4 раза (исходя из принципов построения), следовательно,

$$\mathbf{N_{MT}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 4^{\mathbf{m}}\mathbf{N_M}(\mathbf{n}) = 4^{\mathbf{m}}(\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n})/6.$$

   В то же время, число атомов **S** в тетриксе ($\mathbf{N_{ST}}$) при переходе от поколения к поколению в **Sm**, с одной стороны, увеличивается в 4 раза, а с другой – необходимо учитывать, что в точках касания супертетраэдры имеют общие атомы **S**, по одному на каждом из ребер **Sm**:

$$N_{ST}(1, \mathbf{n}) = 4N_S(\mathbf{n}) - 6.$$

   Повторяя рассуждения, получаем

$$\mathbf{N_{ST}}(2, \mathbf{n}) = 4\mathbf{N_{ST}}(1, \mathbf{n}) - 6 = 4(4\mathbf{N_S}(\mathbf{n}) - 6) - 6$$

$$\mathbf{N_{ST}}(3, \mathbf{n}) = 4\mathbf{N_{ST}}(2, \mathbf{n}) - 6 = 4(4(4\mathbf{N_S}(\mathbf{n}) - 6) - 6) - 6$$

…

$$\mathbf{N_{ST}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 4^{\mathbf{m}}\mathbf{N_S}(\mathbf{n}) - 6\sum_{0}^{m} 4^{a-1} = 4^{\mathbf{m}}\mathbf{N_S}(\mathbf{n}) - 6(4^{\mathbf{m}} - 2)/3 = 4^{\mathbf{m}}(\mathbf{N_S}(\mathbf{n}) - 2) + 2$$

$$\mathbf{N_{ST}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 4^{\mathbf{m}}((\mathbf{n}^3 + 6\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} + 6)/6 - 2) + 2 = 4^{\mathbf{m}}(\mathbf{n}^3 + 6\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 6)/6 + 2$$

2) Единичные тетраэдры, содержащие **In** в центре, образуют тетрикс **S2**(**T2**):

$$\mathbf{x} = \mathbf{N_{InT}}(2, 2) = 4^2\mathbf{N_{In}}(2) = 16\cdot(2^3 + 3\cdot2^2 + 2\cdot2)/6 = 64$$

3) Тогда

$$\mathbf{y} = \mathbf{N_{(In+Cd)T}}(1, 4) - \mathbf{N_{InT}}(2, 2) = 4\cdot\mathbf{N_{(In+Cd)T}}(4) - \mathbf{x} = 4\cdot(4^3 + 3\cdot4^2 + 2\cdot4)/6 - 64 = 16.$$

4) Общее число атомов **S** в **S1**(**T4**), соответственно, равно

$$\mathbf{z} = \mathbf{N_{ST}}(1, 4) = 4(4^3 + 6\cdot4^2 + 11\cdot4 - 6)/6 + 2 = 134.$$

$$In_{64}Cd_{16}S_{134}$$

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 7. Геокупол

1. Вершины многогранника **X**, в которых сходится по пять ребер (одновременно являются вершинами икосаэдра), образуют треугольники, каждый из которых составлен из 9 малых треугольников – граней **X**. Всего в икосаэдре 20 таких больших треугольников, следовательно, общее число треугольных граней в **X** равно

   $$\mathbf{F} = 20 \cdot 9 = 180.$$

   В свою очередь, общее число ребер составляет

   $$\mathbf{E} = 180 \cdot 3/2 = 270$$

   (каждая треугольная грань имеет три ребра, но каждое ребро принадлежит двум граням).

   Общее число вершин можно рассчитать, воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников:

   число вершин (**V**) – число ребер (**E**) + число граней (**F**) = 2.

   Тогда

   $$\mathbf{V} = 2 - \mathbf{F} + \mathbf{E}$$

   $$\mathbf{V} = 2 - 180 + 270 = 92.$$

2. В многограннике **Y** вершины будут формировать пятиугольные и шестиугольные грани, сходящиеся в вершинах по 3, что полностью совпадает с определением фуллереновой молекулы.

   Общее число атомов углерода в фуллереновой молекуле, которой отвечает многогранник **Y**, равно числу треугольных граней в **X**, то есть, в результате описанного преобразования получается фуллерен C_{180}.

3. У представленного в условии каркаса можно выделить три типа вершин:

   - **А** – сходятся 5 ребер (они же – вершины икосаэдра в **X**, удаляются при преобразовании в **X'**);
   - **Б** – сходятся 6 ребер; лежат на отрезке, соединяющем две ближайшие друг к другу вершины **А** (то есть, на ребре икосаэдра в **X**); в многограннике **X'** в них остается по 5 ребер, а, следовательно, они не могут быть удалены при преобразовании в **Z**;
   - **В** – сходятся 6 ребер; лежат в центре треугольных граней икосаэдра в **X**, следовательно, могут удаляться при преобразовании в **Z**.

   Чтобы получить многогранник, составленный из пяти- и шестиугольных граней, необходимо из **X'** удалить все вершины типа **В**. При этом оставшиеся в каркасе вершины типа **Б** дополнительно потеряют по два ребра, и в них будет сходится по три ребра, что отвечает определению фуллеренового многогранника.

То есть, вершинами **Z** будут вершины типа **Б** в **X**. Общее их количество равно числу ребер икосаэдра, умноженному на 2 (так как на каждое ребро икосаэдра приходится две таких вершины):

$$30 \cdot 2 = 60.$$

Таким образом, многограннику **Z** отвечает фуллерен C_{60}. Он содержит в три раза меньше атомов, чем отвечающий многогранинку **Y** C_{180}.

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 8. Лабиринты Нафиона

Рассмотрим куб, вершины которого лежат в центрах ближайших полостей. Длина ребра такого куба равна 5 нм, объем **V** = 5^3 нм^3 = 125 нм^3 = $1{,}25 \cdot 10^{-19}$ см^3.

В свою очередь, площадь поверхности сферических полостей, приходящихся на этот куб, равна

$$\mathbf{S_{сф}} = 1/8 \cdot 8 \cdot 4\pi(4/2)^2 - 1/4 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \pi(1/2)^2 = 16\pi - 3/2\pi = 45{,}6 \text{ нм}^2 = 4{,}56 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$$

(одна полость диаметром 4 нм приходится на 8 таких кубов, на один куб приходится восемь таких полостей, области, пересекающиеся с цилиндрическими каналами, необходимо вычесть из площади сферических полостей, каждый канал приходится на 4 куба, на один куб приходится 12 таких каналов, каждый канал имеет две торцевых стороны).

В то же время на боковую поверхность цилиндрических каналов приходится площадь

$$\mathbf{S_{цил}} = 1/4 \cdot 12 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1 = 9{,}42 \text{ нм}^2 = 9{,}42 \cdot 10^{-18} \text{ м}^2$$

Тогда удельная площадь, отнесенная к объему, составляет

$$S_{уд/об} = \frac{S_{сф} + S_{цил}}{V} = \frac{4{,}56 \cdot 10^{-17} + 9{,}42 \cdot 10^{-18}}{1{,}25 \cdot 10^{-19}} = 439{,}82 \text{ м}^2/\text{см}^3.$$

Площадь волейбольной площадки составляет $\mathbf{S_{вол}} = 9 \cdot 18 = 162$ м^2.

Тогда

$$\mathbf{N} = \mathbf{S_{уд/об}}/\mathbf{S_{вол}} = 439{,}82/162 = 2{,}71.$$

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 9. Расширенный алфавит

1. Избыточность природного кода $4^3/20 = 64/20 = 3{,}2$ (число вариантов трехбуквенного слова, записанного алфавитом из четырех букв, отнесенное к числу шифруемых аминокислот).

   Для того, чтобы зашифровать 20 аминокислот расширенным кодом, хватит всего двух букв, поскольку число вариантов двухбуквенного слова, записанного алфавитом из шести букв, больше, чем число кодируемых аминокислот: $6^2 = 36 > 20$. При этом избыточность составляет $36/20 = 1{,}8$, что в $3{,}2/1{,}8 \approx 1{,}8$ раз меньше, чем для природного кода.

2. При стандартном способе кодирования используются 4 нуклеотидных буквы, то есть, для произвольной последовательности длиной **n** букв возможно $4^{\mathbf{n}}$ вариантов текста, что отвечает объему информации, равному $\mathbf{I_4} = \log_2 4^{\mathbf{n}} = 2\mathbf{n}$ бит информации.

   В то же время, при записи последовательности такой же длины с использованием расширенного алфавита из шести нуклеотидов мы получаем один из $6^{\mathbf{n}}$ вариантов. В этом случае объем информации равен $\mathbf{I_6} = \log_2 6^{\mathbf{n}} = \log_2 2^{\mathbf{n}}3^{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \mathbf{n}\log_2 3 \approx 2{,}58495\mathbf{n} \approx 2{,}58\mathbf{n}$.

   Тогда увеличение объема записанной информации будет в $\mathbf{I_6}/\mathbf{I_4} = 2{,}58\mathbf{n}/2\mathbf{n} = 1{,}29$ раз.

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Решение задачи 10. Кубы и кубики

Для каждого из четырех кластеров запишем длину ребра, выразив ее через **x**:

- **А**: $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} + 10$,
- **Б**: $\mathbf{y} - 2\cdot 2 = 2\mathbf{x} + 10 - 4 = 2\mathbf{x} + 6$ (поскольку, сняв внешний слой толщиной в один атом с кубического кластера, мы получаем новый кубический кластер, на ребро которого приходится на 2 атома меньше, чем на ребро исходного кластера, соответственно, при последовательном снятии двух слоев разница составит 4 атома),
- **В**: $\mathbf{x}$,
- **Г**: $\mathbf{x} - 2$.

Составим кубическое уравнение:

$$(2\mathbf{x} + 6)^3 + \mathbf{x}^3 + (\mathbf{x} - 2)^3 = (2\mathbf{x} + 10)^3$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$\mathbf{x}^3 - 27\mathbf{x}^2 - 186\mathbf{x} - 396 = 0$$

Найдем делители свободного члена данного уравнения:

$396 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 11$,

1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 18, 22, 33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396

По очереди проверяя каждую из величин, находим, что данное уравнение имеет единственное решение:

$$(\mathbf{x} - 33)(\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 12) = 0$$

Таким образом, $\mathbf{x} = 33$.

Тогда,

- **А**: $2\mathbf{y} + 10 = 76$,
- **Б**: $2\mathbf{y} + 6 = 72$,
- **В**: $\mathbf{y} = 33$,
- **Г**: $\mathbf{y} - 2 = 31$.

Общее число атомов в исходном кубе равно $76^3 = 438976$.