Комплекс предметов «химия, физика, математика, биология» для школьников 5 – 9 классов (заключительный этап)
Математика. Вариант I. Решения

Решение задачи 1. Двумерный нитрид бора (5 баллов)

Лист нитрида бора представляет собой плоскость, замощенную правильными шестиугольниками со стороной 0,14 нм.

Площадь такого шестиугольника равна площади равностороннего треугольника со стороной 0,14 нм, взятой 6 раз, и составляет $S_6 = 6S_3 = 6\sqrt{3} \cdot 0{,}14^2/4 = 0{,}04998 \approx 0{,}05$ нм^2.

На один такой шестиугольник приходится 3 атома бора и 3 атома азота, каждый из которых, в свою очередь, принадлежит трем соседним шестиугольникам. Следовательно, на один атом бора приходится площадь, равная площади шестиугольника

$$S_B = S_6 = 0{,}05 \text{ нм}^2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ мкм}^2.$$

Тогда число атомов в листе нитрида бора равно отношению площади листа к площади, приходящейся на один атом бора:

$$N_B = \frac{S}{S_B} = \frac{a \cdot b}{5 \cdot 10^{-8}} = \frac{0{,}9 \cdot 1{,}8}{5 \cdot 10^{-8}} = 3{,}24 \cdot 10^7.$$

Решение задачи 2. Магнитная память (5 баллов)

Каждый бит информации занимает один домен, то есть, число доменов, приходящихся на устройство хранения информации, равно $\mathbf{N} = 200 \cdot 10^{12}$.

При этом на одну сторону каждой из пластин “жесткого диска” приходится

$$\mathbf{N_1} = \mathbf{N}/(2 \cdot 10) = 10 \cdot 10^{12} \text{ доменов.}$$

Площадь области записи данных на одной из сторон пластины составляет

$$\mathbf{S} = \mathbf{S_{внеш}} - \mathbf{S_{внутр}} = \pi R^2_{внеш} - \pi R^2_{внут} = 3{,}1 \cdot ((9/2)^2 - (3/2)^2) = 55{,}8 \text{ см}^2 = 55{,}8 \cdot 10^{14} \text{ нм}^2.$$

Тогда на один домен приходится площадь, равная

$$\mathbf{S_d} = \mathbf{S}/\mathbf{N_1} = 55{,}8 \cdot 10^{14}/ (10 \cdot 10^{12}) = 558.$$

Решение задачи 3. Слоистый поглотитель (5 баллов)

Рассмотрим отдельный слой материала в виде квадрата со стороной **D**, такой, что **D** >> **h**.

Его масса равна $\mathbf{m} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{D}^2\mathbf{h}$, а площадь составляет $\mathbf{S} = 2\mathbf{D}^2$ (так как у каждого слоя две стороны).

Тогда на один грамм материала приходится $\mathbf{S}/\mathbf{m} = 2\mathbf{D}^2/(\boldsymbol{\rho}\mathbf{D}^2\mathbf{h}) = 2/(\boldsymbol{\rho}\mathbf{h})$ м^2 поглощающей поверхности.

Эта поверхность, в свою очередь, способна адсорбировать

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}/\mathbf{m}\cdot\mathbf{m_t} = 2\cdot0{,}28\,/(2{,}8\cdot10^6\cdot25\cdot10^{-9}) = 8 \text{ г/г фенола.}$$

Решение задачи 4. В поисках кубических кластеров (10 баллов)

1.

а) Разложим 1575 на множители:

1575 оканчивается на 5, следовательно, оно кратно 5:

$$1575/5 = 315$$

$$315/5 = 63,$$

$$\text{здесь } 63 = 3\cdot3\cdot7,$$

$$\text{то есть, } 1575 = 3^2\cdot5^2\cdot7.$$

Ближайшим кубом натурального числа, кратного 1575, будет

$$3^3\cdot5^3\cdot7^3 = (3\cdot5\cdot7)^3 = 105^3.$$

Таким образом, на ребро искомого нанокластера должно приходится 105 атомов металла.

б) Разложим 4032 на множители:

4032 – четное число, и при делении его на 2 тоже получается четное.

Поделив его 6 раз на 2:

$$4032/2 = 2016$$

$$2016/2 = 1008$$

$$1008/2 = 504$$

$$504/2 = 252$$

$$252/2 = 126$$

$$126/2 = 63,$$

здесь $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$,

то есть, $4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ближайшим кубом натурального числа, кратного 4032, будет

$$2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7)^3 = 84^3.$$

Таким образом, на ребро искомого нанокластера должно приходится 84 атома металла.

в) Найдем НОК (наименьшее общее кратное) для чисел 1575 и 4032:

$$1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{НОК}(1575, 4032) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 100800.$$

Ближайшим кубом натурального числа, кратного 100800, будет

$$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^3 = 420^3.$$

Таким образом, на ребро искомого нанокластера должно приходится 420 атомов металла.

2. Из трех полученных ранее чисел – 105, 84 и 420 – минимальным является 84, а максимальным – 420.

Найдем длину ребра для каждого из случаев:

$$\mathbf{a}_{min} = 84 \cdot 2\mathbf{r} = 84 \cdot 2 \cdot 0{,}13 = 21{,}8 \text{ нм}.$$

$$\mathbf{a}_{max} = 420 \cdot 2\mathbf{r} = 420 \cdot 2 \cdot 0{,}13 = 109{,}2 \text{ нм}.$$

Найдем радиус сферы, описанной вокруг кубического нанокластера, на ребро которого приходится **n** атомов. Для этого сначала рассмотрим куб, вершины которого лежат в центрах атомов, являющихся вершинами кубического нанокластера. Радиус сферы, описанной вокруг такого куба, отличается от радиуса искомой сферы на величину радиуса атома и может быть рассчитан как половина объемной диагонали куба. Следовательно, радиус сферы, описанной вокруг кубического нанокластера, равен

$$\mathbf{R} = (\mathbf{n} - 1)2\mathbf{r} \cdot \sqrt{3}/2 + \mathbf{r}$$

Тогда:

$$\mathbf{R}_{min} = (\mathbf{n}_{min} - 1)2\mathbf{r} \cdot \sqrt{3}/2 + \mathbf{r} = (84 - 1) \cdot 2 \cdot 0{,}13 \cdot 1{,}7/2 + 0{,}13 = 18{,}5 \text{ нм}.$$

$$\mathbf{R}_{max} = (\mathbf{n}_{max} - 1)2\mathbf{r} \cdot \sqrt{3}/2 + \mathbf{r} = (420 - 1) \cdot 2 \cdot 0{,}13 \cdot 1{,}7/2 + 0{,}13 = 92{,}7 \text{ нм}.$$